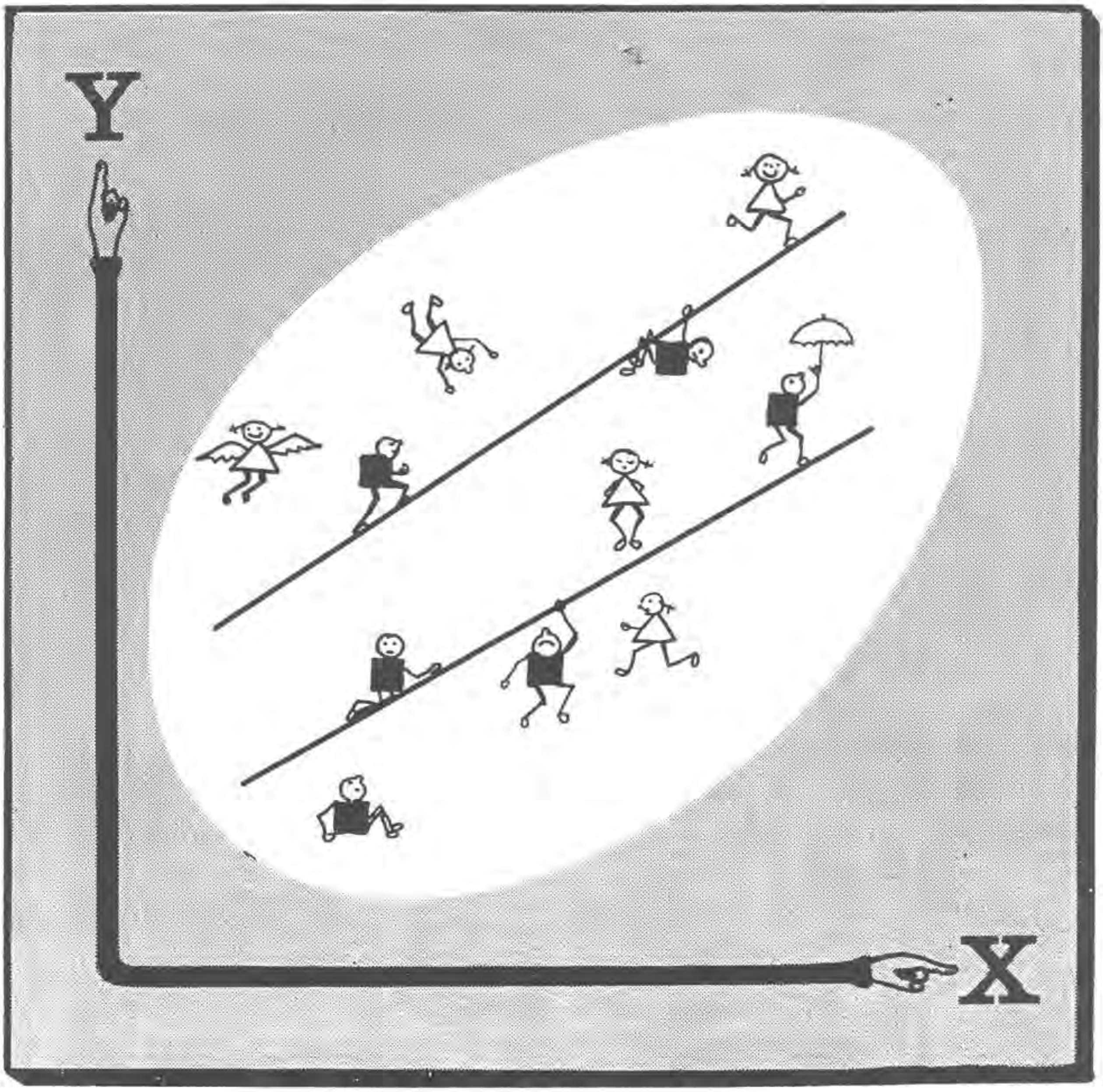
Kompendium i statistik

VARIANS- OCH KOVARIANSANALYS



Allan Svensson

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

Kapitel 1

EN-VÄGS VARIANSANALYS

I INTRODUKTION

En statistisk metodik av generell användbarhet inom många vetenskaper är variansanalys. Namnet på metoden ger en antydan om vad den innebär, nämligen en analys av den observerade variationen i erhållna undersökningsdata. Namnet kan dock vara missledande såtillvida som man egentligen inte är intresserad av att undersöka skillnader mellan olika spridningsmått (varianser), utan man använder sig av olika variansmått för att få veta om vissa centralmått (aritmetiska medeltal) skiljer sig signifikant åt.

I det enklaste fallet innebär variansanalysen att man undersöker om två eller flera stickprovsmedeltal varierar (skiljer sig åt) så mycket, att stickproven med en viss sannolikhet kan anses komma från populationer med skilda medeltal. Denna typ av variansanalys kallas för en-vägs variansanalys. Till skillnad från konventionella t-testningar kan en-vägs variansanalys användas, om man samtidigt vill studera skillnaderna mellan fler än två stickprovsmedeltal.

Vid en en-vägs variansanalys förekommer en oberoende variabel, vilket innebär att man studerar utfallet i en beroende variabel för grupper som har olika värden eller positioner i en oberoende variabel. Man kan t.ex. studera viktökningen bland svin som erhållit olika typer av foder eller inlärningsresultaten hos elevgrupper som erhållit undervisning av varierande längd.

En annan typ av variansanalys är två-vägs variansanalys, vilken gör det möjligt att samtidigt studera två oberoende variabler, t.ex. hur olika slags jordmån och olika typer av gödsel påverkar avkastningen av ett visst slags spannmål. Om man samtidigt vill undersöka tre oberoende variabler, kan man utföra en tre-vägs variansanalys osv. Variansanalyser med fler än tre oberoende variabler inblandade är dock synnerligen sällsynta inom beteendevetenskaperna.

Samtliga typer av variansanalys kan användas såväl vid experimentella undersökningar som vid icke-experimentella undersökningar (sambandsundersökningar). I det förra fallet benämns ofta den oberoende variabeln behandlingsvariabel (treatment variable) och i det senare fallet klassificeringsvariabel (classification variable).

Variansanalysen är en parametrisk metod, vilket innebär att data skall vara uttryckta i intervallskala. Vidare skall fördelningarna vara normala och varianserna lika i de populationer, varifrån stickproven är dragna. Såväl kravet på normalitet som kravet på varianshomogenitet kan man pröva med särskilda testmetoder. Påpekas kan dock att variansanalysen är en ganska robust metod, vilken är relativt okänslig för smärre avvikelser från dessa båda krav.

II EN JÄMFÖRELSE MELLAN EN- OCH TVÅ-VÄGS VARIANSANALYS

De två mest förekommande typerna av variansanalys är en-vägs och två-vägs. Som ovan nämndes skiljer de sig åt med avseende på antalet oberoende variabler som samtidigt studeras. En annan skillnad är att man vid en-vägs variansanalys studerar skillnader mellan gruppmedeltal, medan man vid två-vägs variansanalys studerar: a) skillnader mellan radmedeltal, b) skillnader mellan kolumnmedeltal samt c) interaktionen (samspelet) mellan rad- och kolumnmedeltal.

För att närmare lära känna de båda typerna av variansanalys bör Du läsa igenom nedanstående exempel samt försöka besvara de åtföljande frågorna.

Exempel 1:
För att undersöka vilken stav som är bäst att använda vid stavhoppstävlingar görs en experimentell undersökning. Man väljer ut 30 idrottsmän som samtliga har presterat hopp mellan 380 cm och 400 cm. Idrottsmännen indelas slumpmässigt i 3 grupper. Grupp A tilldelas en brun stav, grupp B en blå stav och grupp C en röd stav. Härefter får grupperna träna 10 timmar per vecka under 3

månader. Nedan återfinns gruppernas medeltal efter träningsperioden:

A	B	C
430 cm	460 cm	490 cm

Exempel 2:
För att undersöka om det finns något samband mellan föräldrarnas inkomst och barnens matematikbetyg i årskurs 6 - dvs. om det finns några skillnader i betyg mellan elever från olika inkomstgrupper - görs följande undersökning. Man konstruerar tre inkomstklasser: HÖG (över 200.000 kr/år), MEDEL (100.000-200.000 kr/år) och LÅG (under 100.000 kr/år). Sedan väljer man ut 100 barn från varje inkomstklass och tar reda på barnens matematikbetyg. Gruppernas genomsnittliga betyg framgår nedan:

HÖG	MEDEL	LÅG
4.2	3.5	2.8

Frågor:
Vilken statistisk metodik kan man använda i exempel 1 respektive 2?

Vilka kausala tolkningar är möjliga i exempel 1 respektive 2?

Exempel 3:
Vi gör ett tillägg till exempel 1, såtillvida att vi väljer ut ytterligare 30 "4-metersmän", vilka slumpas på grupp A, B och C, men dessa 30 får träna i 6 månader i stället för 3. I tabellen nedan finns såväl de tidigare redovisade medeltalen som "nykomlingarnas" medeltal.

Tränings-period	Grupp A	B	C	Radmedeltal
3 mån	430	460	490	
6 mån	500	500	500	
Kolumn-medeltal				

Frågor:

Vad blir radmedeltalen?

Vad blir kolumnmedeltalen?

Finns det någon interaktionseffekt?

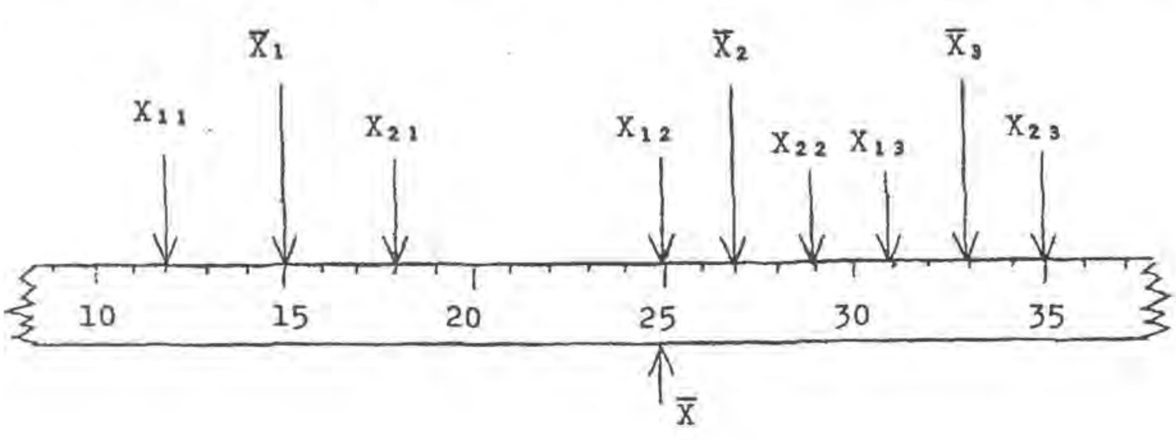
Hur skall vi bygga ut undersökningen i exempel 2, för att kunna använda två-vägs variansanalys?

III INOM- OCH MELLANGRUPPSVARIANSMÅTT

Variansanalysen bygger på det förhållandet att avvikelsen mellan ett individuellt mätvärde och totalmedelvärdet kan uppdelas i olika komponenter. Vid en en-vägs variansanalys kan denna avvikelse uppdelas i två komponenter: Avvikelsen mellan det individuella mätvärdet och den egna gruppens medelvärde samt avvikelsen mellan gruppens medelvärde och totalmedelvärdet.

Genom att summera, kvadrera och dividera dessa båda typer av avvikelser erhåller man så småningom ett inom- och ett mellangruppsvariansmått, vilka spelar en central roll inom variansanalysen. I följande exempel skall vi försöka visa hur man kommer fram till dessa variansmått.

I en undersökning ingick tre grupper med två individer i varje grupp. Samtliga individuella mätvärden liksom gruppmedeltal och totalmedeltal återges i figuren nedan. Varje individuellt värde har en tvåsiffrig index, där första siffran anger individnummer och andra siffran gruppnummer. Gruppmedeltalen har ett ensiffrigt index och totalmedeltalet är indexfritt. X_{11} anger sålunda mätvärdet för individ nummer ett i den första gruppen och $\overline{X}_1$ medeltalet för denna grupp. Mera generellt anger X_{ij} mätvärdet för den i:te individen i den j:te gruppen och $\overline{X}_j$ medeltalet för grupp j.



Nedan följer två identiteter. Sätt in de numeriska värdena i dessa samt markera respektive avvikelser i figuren.

1) X_{11} avvikelse från $\bar{X}$ = $(X_{11}-\bar{X}) = (X_{11}-\bar{X}_1) + (\bar{X}_1-\bar{X})$

2) X_{21} avvikelse från $\bar{X}$ = $(X_{21}-\bar{X}) = (X_{21}-\bar{X}_1) + (\bar{X}_1-\bar{X})$

Mera generellt kan identiteten skrivas:

X_{ij} avvikelse från $\bar{X}$ = $(X_{ij}-\bar{X}) = (X_{ij}-\bar{X}_j) + (\bar{X}_j-\bar{X})$

Om båda sidor i denna identitet kvadreras och vi summerar över samtliga individer i grupp j erhålles:

$$\sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij}-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij}-\bar{X}_j)^2 + \sum_{j=1}^{n_j} (\bar{X}_j-\bar{X})^2 + 2(\bar{X}_j-\bar{X}) \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij}-\bar{X}_j)$$

Den andra termen till höger kan skrivas $n_j(\bar{X}_j-\bar{X})^2$, eftersom man summerar en konstant över n_j individer.

Den tredje termen till höger kan du stryka ett streck över, ty den blir alltid lika med noll. Förklaringen härtill är att denna term bl a innehåller summan av individernas avvikelser från det egna gruppmedeltalet, vilken summa givetvis är noll. Om vi ej hade kvadrerat uttrycket så hade den första termen rönt samma öde.

Exemplifiering för grupp 1:

A. Kvadrering

$$(-13)^2 = (-3)^2 + (-10)^2 + 2(-3)\,(-10)$$
$$(-7)^2 = (+3)^2 + (-10)^2 + 2(+3)\,(-10)$$

B. Summering

$$\left[(-13)^2 + (-7)^2\right] = \left[(-3)^2 + (+3)^2\right] + \left[(-10)^2 + (-10)^2\right] + $$
$$+\ 2(-10)\ \left[(-3) + (+3)\right]$$

$$\left[169 + 49\right] = \left[9 + 9\right] + \left[100 + 100\right] + 2(-10) \cdot 0$$
$$218 = 18 + 200 + 0$$

Om vi slutligen summerar över samtliga (k) grupper erhålles följande uttryck:

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij}-\bar{X})^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij}-\bar{X}_j)^2 + \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{X}_j-\bar{X})^2$$

Denna identitet lyder:

Summan av de kvadrerade avvikelser mellan individvärdena och totalmedeltalet =
en INOMGRUPPSKVADRATSUMMA, dvs. summan av individernas kvadrerade avvikelser från det egna gruppmedeltalet
+ en MELLANGRUPPSKVADRATSUMMA, dvs. summan av de kvadrerade avvikelserna mellan grupp- och totalmedeltal, där varje sådan avvikelse multiplicerats med antalet individer i respektive grupp.

Dessa båda summor är oberoende, dvs. att det finns inget förhållande eller samband mellan de båda summorna - den ena summan kan vara stor och den andra liten, båda kan vara stora, båda kan vara små etc.

Till varje kvadratsumma hör ett bestämt antal <u>frihetsgrader</u> (degrees of freedom - df -)

Om det totala antalet individer som ingår i en analys betecknas med N och antalet individer i en grupp med n, finns det totalt N-1 frihetsgrader. Hur kan man förklara det? Möjligen på följande sätt: En variansanalys bygger på avvikelser från medeltal och summan av samtliga individuella avvikelser från totalmedeltal är 0. I och med att man har fixerat totalmedeltalet kan man fritt välja alla individuella värden utom det sista, dvs. man har förlorat en frihetsgrad i och med att totalmedeltalet är bestämt.

Till inomgruppskvadratsumman hör N-k frihetsgrader. Inom varje grupp finns det n-1 frihetsgrader. En frihetsgrad förloras i och med att vi bestämt gruppmedeltalet. Sammanlagt inom k grupper finns det $(n_1-1) + (n_2-1) + \dots\dots\dots + (n_k-1) = N-k$ frihetsgrader.

Till mellangruppskvadratsumman hör k-1 frihetsgrader. Då totalmedelvärdet bestämts kan jag fritt placera ut samtliga gruppmedeltal utom det sista.

Frihetsgraderna är additiva.

Totalt	=	Inom	+	Mellan
(N-1)		(N-k)		(k-1)

I vårt exempel var N=6 och k=3. Ange antalet frihetsgrader som hör till de olika kvadratsummorna!

Om inom- och mellangruppskvadratsummorna divideras med sitt frihetsgradsantal erhålls de s.k. variansmåtten, även kallade medelkvadrater (mean squares).

$$\frac{\text{Mellangruppskvadratsumman}}{k-1} = S_b^2 = \text{mellangruppsvariansmått}$$

$$\frac{\text{Inomgruppskvadratsumman}}{N-k} = S_w^2 = \text{inomgruppsvariansmått}$$

Variansmåtten är - i motsats till kvadratsummor och frihetsgrader - ej additiva. Man kan således ej få fram något totalt variansmått, genom att addera mellan- och inomgruppsvariansmåtten. Däremot erhåller man en F-kvot genom att dividera mellangruppsvariansmåttet med inomgruppsvariansmåttet.

$$\boxed{\frac{S_b^2}{S_w^2} = \text{F-kvot}}$$

Genom att sedan gå in i en F-tabell kan vi få reda på om det finns signifikanta skillnader mellan gruppmedeltalen, dvs. om samtliga stickprov med en viss sannolikhet kan anses dragna från samma population eller ej. Om stickproven kommer från samma population blir F ungefär lika med 1, i annat fall blir F betydligt större än 1.

Innan F-kvoten behandlas utförligare, skall vi närmare granska de båda krumelurerna S_b^2 och S_w^2.

Med hjälp av tidigare givna ekvationer torde den i statistik något bevandrade läsaren kunna uttolka vad symbolerna innebär, nämligen:

S_w^2 = den genomsnittliga variansen inom grupperna, dvs. den genomsnittliga spridningen inom grupperna i kvadrat.

S_b^2 = variansen (den kvadrerade spridningen) i medeltalsfördelningen multiplicerad med gruppstorleken.

Den misstrogna eller i statistik något mindre hemmastadde läsaren hänvisas till bevisföringen i Ferguson (s. 287-288).

Varför blir då F-kvoten ett eller ungefär lika med ett, om stickproven kommer från samma population?

Om samtliga stickprov kommer från samma population bör spridningarna inom stickproven vara ungefär lika och de smärre differenser som kan finnas har åstadkommits av slumpen (samplingsfel).

$$S_1 \approx S_2 \approx S_3 \approx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \approx S_k$$

Den genomsnittliga spridningen inom grupperna (medeltalet av samtliga spridningar) S_w ger oss en god skattning av spridningen i populationen (σ). Likaså ger oss S_w^2 en god skattning av variansen i populationen (σ^2).

Vidare - om stickproven är dragna från samma population - får vi spridningen i medeltalsfördelningen (medelfelet) enligt följande formel:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

där σ är spridningen i populationen och n är lika med gruppstorleken

Härav följer att:

$$\sigma = \sqrt{n}\,\sigma_{\overline{X}}$$

Om båda sidor kvadreras erhålles:

$$\sigma^2 = n\,\sigma_{\overline{X}}^2$$

Men vi vet att det högra ledet i ekvationen (gruppstorleken multiplicerad med variansen i medeltalsfördelningen) är lika med S_b^2.

Härav följer att $\sigma^2 = S_b^2$

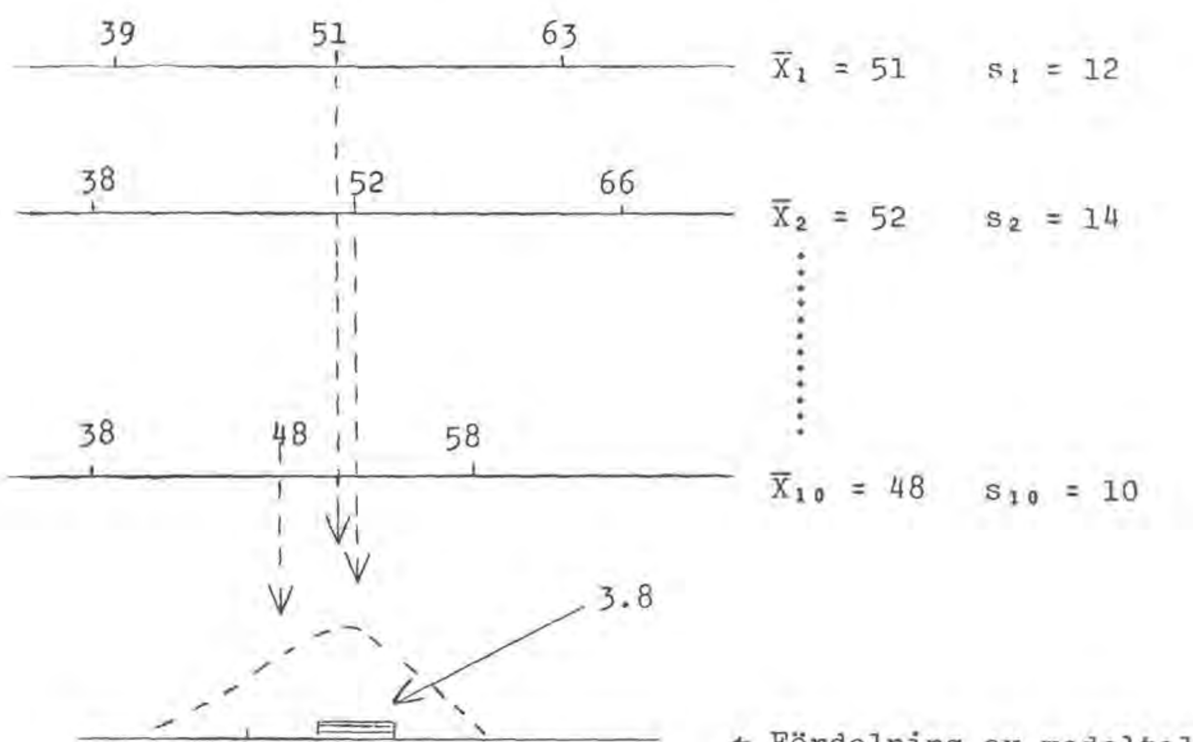
Tidigare har vi också visat att $\sigma^2 = S_w^2$

Dvs. ett om stickproven kommer från samma population blir $S_w^2 = S_b^2$, ty båda är lika med variansen i populationen (σ^2) - och

$$\text{F-kvoten} = \frac{S_b^2}{S_w^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

För att belysa det kanske något svårsmälta resonemanget ovan skall vi ge följande exempel:

10 stickprov om 10 individer i varje dras från samma population. Varje individ får genomgå ett prov i elementär matematik. Härefter beräknas medeltal och spridning inom varje grupp. Såväl medeltal som spridning varierar något från stickprov till stickprov. Den genomsnittliga spridningen inom grupperna uppgår till 12. Spridningen i medeltalsfördelningen uppgår till 3.8.



$S_w^2 = 12^2 = 144$; (den genomsnittliga spridningen inom grupperna i kvadrat)

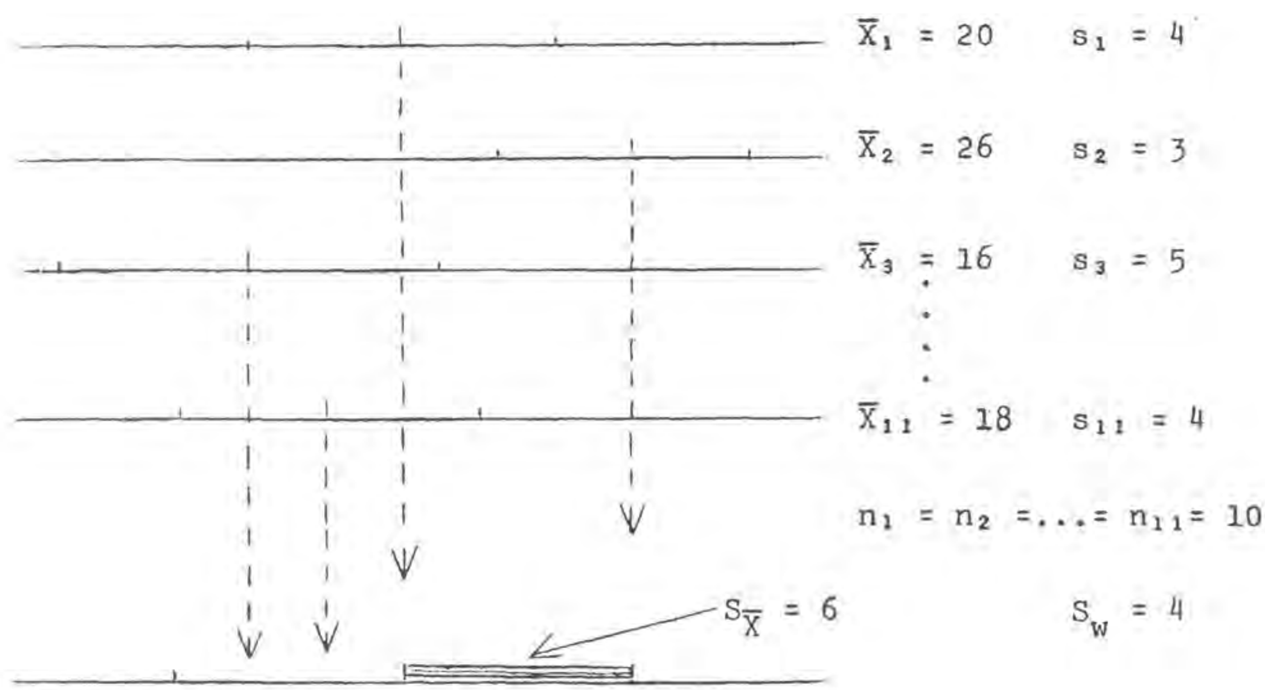
$S_b^2 = 3.8^2 \cdot 10 = 14.4 \cdot 10 = 144$

$$F = \frac{S_b^{\,2}}{S_w^{\,2}} = \frac{144}{144} = 1$$

F-kvoten är ej signifikant, vilket är ganska självklart eftersom stickproven kommer från samma population.

Vi skall så ge ett exempel där stickproven kommer från olika populationer:

Ett prov i trafikkunskap bjuds till 11 olika grupper av förare. I varje grupp ingår 10 personer. Medeltal och spridning på provet beräknas inom varje grupp. Likaså den genomsnittliga spridningen inom grupperna samt spridningen i medeltalsfördelningen.



Fördelning av medeltal

$S_w^{\,2} = 4^2 = 16;$

$S_b^{\,2} = 10 \cdot 6^2 = 360$

$$F = \frac{S_b^{\,2}}{S_w^{\,2}} = \frac{360}{16} = 22.5$$

Är detta värde signifikant? Gå till F-tabellen. Denna läses på följande sätt:

$$\frac{S_b^2}{S_w^2} \Rightarrow \text{d.f.} = k-1 = 11-1 = 10$$

$$\Downarrow$$

$$\text{d.f.} = N-k = 110-11 = 99$$

Något F-värde finns ej för df: 10; 99, varför vi går till df: 10; 100, där vi finner

1.92
2.51

Detta innebär att vi i vårt fall måste ha ett F-värde på 1.92 för att det skall finnas signifikanta skillnader mellan grupperna på 5 %-nivån. Vidare måste vi ha ett F-värde på minst 2.51 för att de skall finnas signifikanta skillnader på 1 %-nivån. Vårt F-värde på 22.5 upplyser om att det finns starka signifikanta skillnader mellan grupperna.

Vi avslutar detta avsnitt med följande påpekanden:

1) Om F är lika med eller ungefär lika med 1 innebär det att $S_b^2 \approx S_w^2$, vilket innebär att skillnaderna inom grupperna är ungefär lika stora som skillnaderna mellan grupperna. I den undersökta variabeln är sålunda gruppmedlemmarna ej mer lika inbördes, än vad de är lika övriga gruppers medlemmar och samtliga grupper torde komma från samma population.

2) Om F är betydligt större än 1 innebär det att $S_b^2 > S_w^2$, vilket beror på att skillnaderna inom grupperna är mindre än skillnaderna mellan grupperna. Gruppmedlemmarna är i den aktuella variabeln mer lika varandra än vad de är lika övriga gruppers medlemmar, vilket tolkas som att grupperna tillhör olika populationer.

3) F-fördelningens form varierar beroende på antalet frihetsgrader i täljare och nämnare. För en beskrivning av F-fördelningarnas utseende hänvisas till Walker och Lew (1953, s. 207-209).

4) Ju större grupperna är och ju fler grupper som ingår i undersökningen, ju lägre F-kvot krävs för signifikans, vilket framgår av F-tabellen.

5) Oftast använder man sig av en annan och enklare metodik vid räkningsarbetet än de "åskådlighetsmetodiker" som vi hittills tillämpat. De beräkningsformler som behövs återfinns i följande avsnitt.

6) Rent allmänt torde man kunna påstå: *Att mekaniskt utföra en variansanalys är relativt enkelt; att förstå vad en variansanalys verkligen innebär är betydligt svårare.*

IV BERÄKNINGSFORMLER VID EN-VÄGS VARIANSANALYS

Själva räkningsarbetet vid en variansanalys underlättas avsevärt om man använder följande formler:

Inomgruppskvadratsumman:

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\bar{X}_j)^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{T_j^2}{n_j}\right)$$

Mellangruppskvadratsumman:

$$\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{X}_j-\bar{X})^2 = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{T_j^2}{n_j}\right) - \frac{T^2}{N}$$

Totalkvadratsumman:

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\bar{X})^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$$

Anmärkningar:

1. I formlerna står T_j för samtliga mätvärden i den j:te gruppen och T för summan av samtliga mätvärden.

2. Totalkvadratsumman behöver man egentligen inte räkna ut, eftersom den inte behövs i det fortsatta beräkningsarbetet. Om man räknar ut den får man emellertid en kontroll av att inom- och mellangruppskvadratsummorna är rätt räknade. Hur gör man denna kontroll?
3. Om individantalet är lika i samtliga grupper förenklas formlerna enligt följande:

Inomgruppskvadratsumman:

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} X_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{k} T_j^2}{n}$$

Mellangruppskvadratsumman:

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} T_j^2}{n} - \frac{T^2}{N}$$

I följande exempel kommer vi att tillämpa beräkningsformlerna:

För att undersöka effekten av tre olika bantningskurer, ANTIFETT -, BANTALÄTT - respektive CURACAOMETODEN, väljer man ut 15 försökspersoner. Dessa fördelas slumpmässigt på de tre metoderna. Efter en månads bantning registrerar man viktminskningen, vilken återges i nedanstående tabell. Med utgångspunkt från denna skall vi se om det finns några skillnader mellan metoderna, dvs. vi skall testa nollhypotesen.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

Grupp	I	II	III
	1	2	3
	2	3	4
	3	4	5
	4	5	6
	5	6	7

Grupp	I	II	III	
n	5	5	5	$N = 15$
T_j	15	20	25	$T = 60$
$\overline{X}_j$	3	4	5	$\frac{T^2}{N} = 240$
$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}^2$	55	90	135	$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} X_{ij}^2 = 280$

Kvadratsummor:

Mellan = $\frac{\sum_{j=1}^{k} T_j^2}{n} - \frac{T^2}{N} = 250 - 240 = 10$

Inom = $\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} X_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{k} T_j^2}{n} = 280 - 250 = 30$

Totalt: $\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} X_{ij}^2 - \frac{T^2}{N} = 280 - 240 = 40$

Resultaten sammanfattas i följande tabell:

Variationskälla	Kvadratsumma	df	Variansmått	F
Mellan	10	2	5	2
Inom	30	12	2.5	
Totalt	40	14		

Kritiskt värde för 5 %-nivån (df = 2 och 12) = 3.88.

Hur vill Du tolka utfallet av analysen?

V SKILLNADER MELLAN ENSKILDA GRUPPER

Om man får en signifikant F-kvot, ger den endast upplysning om att det finns signifikanta skillnader mellan vissa grupper. Däremot får man ej veta, mellan vilka grupper som skillnaderna är signifikanta. När man erhållit en signifikant F-kvot, och det i analysen ingår fler än två grupper, får man därför gå vidare och signifikanstesta skillnaderna mellan de olika gruppmedeltalen. Härvid används följande formel:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_w^2}{n_1} + \frac{S_w^2}{n_2}}}$$

$\bar{X}_1$ = = medeltalet för grupp 1

$\bar{X}_2$ = = medeltalet för grupp 2

n_1 = = antalet individer i grupp 1

n_2 = = antalet individer i grupp 2

S_w^2 = inomgruppsvariansmåttet

Om vi återvänder till exemplet med provet i trafikkunskap (sid 10) och signifikanstestar skillnaden mellan grupp 2 och 1 får vi följande värde:

$$t = \frac{26-20}{\sqrt{\frac{4^2}{10}+\frac{4^2}{10}}} = \frac{6}{\sqrt{3.2}} = 3.35$$

När en t-testning följer på en F-testning används det frihetsgradsantal som gäller för inomgruppsvariansmåttet (som hela tiden återfinns i nämnaren). I detta fall blir således antalet frihetsgrader

99. De kritiska värdena för t kan utläsas ur tabellen på sidan 45. På 1%-nivå uppgår det kritiska värdet till 2.63, vilket innebär att skillnaden mellan grupp 2 och 1 är signifikant.

I det nämnda exemplet ingick elva grupper. Låt oss kalla den grupp som har det högsta medeltalet för A, gruppen med det näst högsta för B etc. När man skall t-testa skillnaderna mellan medeltalen, börjar man med skillnaden mellan de båda högsta, dvs mellan A och B. Om denna differens är signifikant innebär det att A:s medeltal är signifikant högre än alla de andra gruppernas. Sedan går man vidare och testar differensen mellan B och C, C och D osv. Testningarna går snabbt att genomföra ty som framgår av formeln förblir nämnaren hela tiden densamma.

Resultaten av t-testningarna redovisas genom att man ordnar gruppmedeltalen i fallande storleksordning samt stryker ett streck under de medeltal som inte är signifikant åtskilda, t ex:

A B C D E F G H I J K

Genom denna uppställning får man en snabb överblick av variansanalysens utfall - A:s medeltal är signifikant högre än B:s, som i sin tur är signifikant högre än C:s, D:s och E:s. Mellan dessa tre grupper finns ingen signifikans, men alla är signifikant större än ....

Kapitel 2

FLER-VÄGS VARIANSANALYS

I INTRODUKTION

En undersökning kan ges en sådan uppläggning att man samtidigt kan studera hur två eller flera oberoende variabler - också kallade experimentella variabler eller faktorer - inverkar på en beroende variabel. Denna typ av designer kallas vanligen för faktoriella designer.

Om man har två oberoende variabler, vilka båda endast kan anta två värden (nivåer eller levels), har man en 2×2 design. Om båda variablerna kan anta tre värden får man en 3×3 design. I bägge fallen rör det sig om två-vägs variansanalys. Varför?

Använder man sig av tre oberoende variabler, som vardera kan anta två värden erhåller man en 2×2×2 design. I detta fallet kan man utföra en tre-vägs variansanalys. Försök att ge exempel på en 4×3×2 design.

II TVÅ-VÄGS VARIANSANALYS

För att undersöka effekten av två olika bantningskurer - Apelsinmetoden respektive Bananmetoden - vid behandlingsperioder av varierande längd görs en experimentell undersökning. 60 personer i viktklassen 110 till 120 kg fördelas slumpvis på behandling A och B. Inom varje behandlingsgrupp uppdelas individerna sedan i tre undergrupper, vilka erhåller 10, 20 respektive 30 veckors behandling.

I denna undersökning har man alltså en 2×3 design - eller en design bestående av 2 rader och 3 kolumner med 10 individer i varje cell. Designen illustreras i nedanstående tablå, där vi även redovisat indexmarkeringarna vid en två-vägs variansanalys. Första indexet betecknar radtillhörigheten, andra indexet kolumntillhörigheten och tredje indexet individens nummer inom cellen. En eller flera punkter symboliserar någon typ av medeltal.

		Kolumn 1	Kolumn 2	Kolumn 3
Rad	1	X_{111} ⋮	X_{121} ⋮	X_{131} ⋮
	2	X_{211} ⋮	X_{221} ⋮	X_{231} ⋮

Försök att placera in följande krumelurer i tablån:

X_{237} $\quad$ $\bar{X}_{.2.}$

$\bar{X}_{12.}$ $\quad$ $\bar{X}_{...}$

$\bar{X}_{1..}$ $\quad$ X_{rci}

Liksom vid en en-vägs variansanalys kan en viss individs avvikelse från totalmedeltalet uppdelas i olika additiva delar:

$$
\begin{aligned}
(X_{rci} - \bar{X}_{...}) = \; & (\bar{X}_{r..} - \bar{X}_{...}) \\
& + (\bar{X}_{.c.} - \bar{X}_{...}) \\
& + (\bar{X}_{rc.} - \bar{X}_{r..} - \bar{X}_{.c.} + \bar{X}_{...}) \\
& + (X_{rci} - \bar{X}_{rc.})
\end{aligned}
$$

Detta uttryck innebär att individens avvikelse från totalmedeltalet uppdelas i:

1)

2)

3)

4)

Vad blir de fyra komponenterna om följande värden gäller:

$X_{rci} = 55$, $\bar{X}_{r..} = 35$, $\bar{X}_{.c.} = 35$, $\bar{X}_{rc.} = 50$, $\bar{X}_{...} = 25$

Om samtliga avvikelser kvadreras och summeras över samtliga rader, kolumner och celler erhålles fem kvadratsummor: total-, rad-, kolumn-, interaktions och inom-cells kvadratsumma. Om de fyra sista kvadratsummorna divideras med sina respektive frihetsgradsantal erhålles fyra variansmått (se tabellen nedan). Fortfarande är kvadratsummor och frihetsgrader additiva - så ej variansmåtten.

Variationskällor, kvadratsummor, frihetsgrader och variansmått vid en två-vägs variansanalys med n individer i varje cell.

Variations-källa	Kvadratsumma	df	Varians-mått
Rader	$nC \sum_{r=1}^{R} (\bar{X}_{r..} - \bar{X}_{...})^2$	R-1	S_r^2
Kolumner	$nR \sum_{c=1}^{C} (\bar{X}_{.c.} - \bar{X}_{...})^2$	C-1	S_c^2
Interaktion	$n \sum_{r=1}^{R} \sum_{c=1}^{C} (\bar{X}_{rc.} - \bar{X}_{r..} - \bar{X}_{.c.} + \bar{X}_{...})^2$	(R-1)(C-1)	S_i^2
Inom celler	$\sum_{r=1}^{R} \sum_{c=1}^{C} \sum_{i=1}^{n} (X_{rci} - \bar{X}_{rc.})^2$	RC(n-1)	S_w^2
Totalt	$\sum_{r=1}^{R} \sum_{c=1}^{C} \sum_{i=1}^{n} (X_{rci} - \bar{X}_{...})^2$	nRC-1	

Nedan redovisas två hypotetiska utfall av vår bantningsundersökning. I utfall 1 saknas och i utfall 2 finns en interaktionseffekt. Hur kan man se detta?

Utfall 1

	10 v	20 v	30 v	
A-metoden	10	20	30	20
B-metoden	20	30	40	30
	15	25	35	25

Utfall 2

	10 v	20 v	30 v	
A-metoden	10	15	17	14
B-metoden	10	20	30	20
	10	17.5	23.5	17

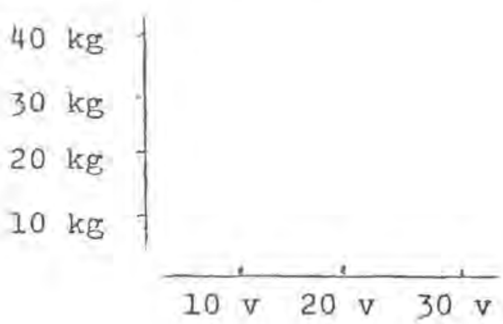
Om det ej finns någon interaktionseffekt gäller följande identitet för samtliga cellmedeltal:

$$\bar{X}_{rc.} = \bar{X}_{r..} + \bar{X}_{.c.} - \bar{X}_{...}$$

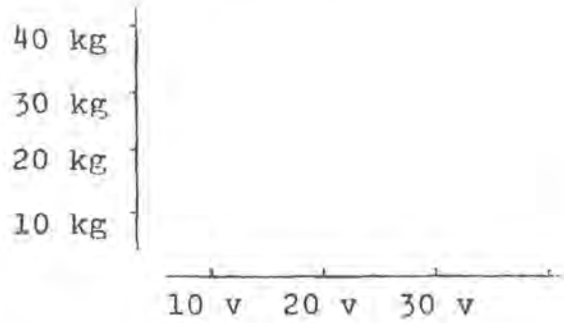
Gör en prövning av de givna resultaten.

Vi kan också avslöja interaktionseffekten grafiskt, genom att plocka in cellmedeltalen i nedanstående diagram:

Utfall 1



Utfall 2



En två-vägs variansanalys leder fram till en F-testning av: a) radeffekten, b) kolumneffekten och c) interaktionseffekten. Innan man gör testningarna måste man besluta sig för vilken modell som gäller, ty modellen bestämmer valet av felterm (= nämnaren vid F-testningen).

Tre modeller finnes:

Modell I (FIXED MODEL)
Modell II (RANDOM MODEL)
Modell III (MIXED MODEL)

Inom beteendevetenskaplig forskning arbetar man oftas efter modell I, dvs. värdena på den oberoende variabeln har valts därför att de är av speciellt intresse och anses ej slumpvis valda ur en stor "värdepopulation". Är värdena i båda variablerna slumpvis valda - vilket torde vara synnerligen sällsynt - får man tillämpa modell II. Är värdena slumpvis valda enbart i den ena variabeln väljs modell III.

När man arbetar utifrån modell I används inom-cellsvariationsmåttet som felterm vid samtliga tre F-testningar. Valet av felterm vid de båda övriga modellerna redovisas av Ferguson (1966, s. 310). För en utförligare diskussion i denna fråga hänvisas till Edwards (1960).

Här redovisas ytterligare ett tänkbart utfall av vårt bantningsexperiment. Det blir din uppgift att komplettera tabellen med frihetsgradsantal, variansmått och F-kvoter - samt att redogöra för de funna F-värdenas innebörd.

Variations-källa	Kvadratsumma	df	Varians-mått	F
Rader	750			
Kolumner	1100			
Interaktion	300			
Inom celler	5400			
Totalt	7550			

Även vid en två-vägs variansanalys förekommer särskilda beräkningsformler. Vi skall redovisa dem i samband med följande exempel:

I en undersökning studerade man hur två olika undervisningsmetoder i engelska (C_1 och C_2), vilka pågått under tio respektive 20 veckor (R_1 respektive R_2), inverkat på kunskapsbehållningen. Denna mättes med ett prov, där eleverna kunde erhålla maximalt 20 poäng. I tabellen återfinns samtliga elevers resultat på provet. Utifrån *dessa data skall vi signifikanstesta rad-, kolumn- och interaktionseffekten (Modell I gäller).*

	C_1		C_2		
R_1	3 4 5 6 7	$T_{11} = 25$ $\overline{X}_{11.} = 5$	8 9 10 11 12	$T_{12} = 50$ $\overline{X}_{12.} = 10$	$T_{1.} = 75$ $\overline{X}_{1..} = 7.5$
R_2	3 4 5 6 7	$T_{21} = 25$ $\overline{X}_{21.} = 5$	13 14 15 16 17	$T_{22} = 75$ $\overline{X}_{22.} = 15$	$T_{2.} = 100$ $\overline{X}_{2..} = 10$
		$T_{.1} = 50$ $\overline{X}_{.1.} = 5$		$T_{.2} = 125$ $\overline{X}_{.2.} = 12.5$	$T = 175$ $\overline{X}_{...} = 8.75$

Radsummorna i kvadrat:

$$\sum_{r=1}^{R} T_{r.}^{2} = 75^2 + 100^2 = 15\ 625$$

Kolumnsummorna i kvadrat:

$$\sum_{c=1}^{C} T_{.c}^{2} = 50^2 + 125^2 = 18\ 125$$

Cellsummorna i kvadrat:

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{c=1}^{C} T_{rc}^{2} = 25^2 + 50^2 + 25^2 + 75^2 = 9375$$

Summan av de individuella värdena i kvadrat:

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{c=1}^{C} \sum_{i=1}^{n} X_{rci}^{2} = 3^2 + 4^2 + 5^2 \ldots\ldots + 16^2 + 17^2 = 1915$$

I och med att vi har räknat ut dessa fyra summor har vi fått fram det "råmaterial" som behövs för att beräkna rad-, kolumn-, interaktions-, inom-cells- samt totalkvadratsumman. Dessa erhålls med hjälp av följande formler:

Radkvadratsumman.

$$\frac{1}{nC} \sum_{r=1}^{R} T_{r.}^{2} - \frac{T^2}{N} = \frac{15625}{5 \cdot 2} - \frac{175^2}{20} = 31.2$$

Kolumnkvadratsumman:

$$\frac{1}{nR} \sum_{c=1}^{C} T_{.c}^{2} - \frac{T^2}{N} = \frac{18125}{5 \cdot 2} - \frac{175^2}{20} = 281.2$$

Interaktionskvadratsumman:

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{R} \sum_{c=1}^{C} T_{rc}^{2} - \frac{1}{nC} \sum_{r=1}^{R} T_{r.}^{2} - \frac{1}{nR} \sum_{c=1}^{C} T_{.c}^{2} + \frac{T^2}{N} =$$

$$= \frac{9375}{5} - \frac{15625}{5 \cdot 2} - \frac{18125}{5 \cdot 2} + \frac{175^2}{20} = 31.3$$

Inom-cellskvadratsumman:

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{c=1}^{C} \sum_{i=1}^{n} X_{rci}^{2} - \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{R} \sum_{c=1}^{C} T_{rc}^{2} = 1915 - \frac{9375}{5} = 40$$

Totalkvadratsumman:

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{c=1}^{C} \sum_{i=1}^{n} X_{rci}^{2} - \frac{T^2}{N} = 1915 - \frac{175^2}{20} = 383.7$$

De fem kvadratsummorna återfinns i nedanstående tabell, där vi även angett frihetsgradsantal och variansmått:

Variations-källa	Kvadratsumma	df	Variansmått
Rader	31.2	1	31.2
Kolumner	281.2	1	281.2
Interaktion	31.3	1	31.3
Inom celler	40	16	2.5
Totalt	383.7	19	

F-värden:

$$F_r = \frac{31.2}{2.5} = 12.48$$

$$F_c = \frac{281.2}{2.5} = 112.48$$

$$F_i = \frac{31.3}{2.5} = 12.52$$

Nu återstår bara en sak, nämligen tolkningen av resultatet. Detta överlämnas med varm hand till läsaren.

III TRE-VÄGS VARIANSANALYS

För att ge läsaren en åtminstone flyktig förnimmelse av vad en tre-vägs variansanalys innebär, skall vi redogöra för en uppdiktad studie, där denna metodik tillämpas.

I en undersökning vill man studera hur retentionen av verbalt material påverkas av tre olika faktorer samt om det finns någon interaktion mellan faktorerna. För att mäta den beroende variabeln använder man sig av en lista bestående av 30 flicknamn. De tre oberoende variablerna är:

A) Presentation: 1) Visuell
2) Auditiv

B) Antal presentationer: 1) En presentation
2) Två presentationer

C) Återgivning: 1) Omedelbar återgivning
2) Återgivning en timma efter presentationen.

Sammanlagt deltar 40 försökspersoner som slumpvis fördelas på 8 lika stora behandlingsgrupper.

Behandling	Presentation	Antal presentationer	Återgivning
A_1 B_1 C_1	Visuell	En	Omedelbar
A_1 B_1 C_2	"	"	Fördröjd
A_1 B_2 C_1	"	Två	Omedelbar
A_1 B_2 C_2	"	"	Fördröjd
A_2 B_1 C_1	Auditiv	En	Omedelbar
A_2 B_1 C_2	"	"	Fördröjd
A_2 B_2 C_1	"	Två	Omedelbar
A_2 B_2 C_2	"	"	Fördröjd

I denna undersökning utgår man från en 2×2×2 design, vilket möjliggör en tre-vägs variansanalys. I tabellen nedan anges de olika variationskällorna samt frihetsgradsantalen.

Variationskälla		df
A:	Presentation (Visuell-Auditiv)	(A-1)=1
B:	Antal presentationer (En-Två)	(B-1)=1
C:	Återgivning (Omedelbar-Fördröjd)	(C-1)=1
A×B:	Presentation × Antal	(A-1)(B-1)=1
A×C:	Presentation × Återgivning	(A-1)(C-1)=1
B×C:	Antal × Återgivning	(B-1)(C-1)=1
A×B×C:	Presentation × Antal × Återgivning	(A-1)(B-1)(C-1)=1
Inom cellerna		ABC(n-1)=32
Totalt		nABC(-1)=39

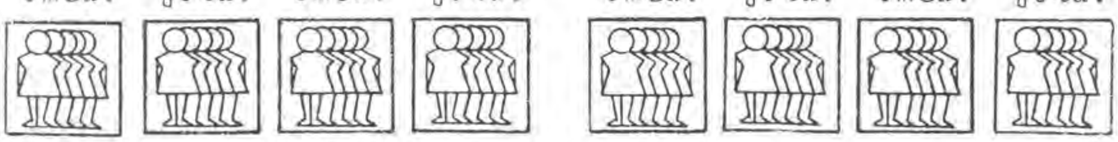
Under förutsättning att värdena på de tre oberoende variablerna är speciellt utvalda (Modell I gäller), används inomcellsvariationsmåttet som felterm vid samtliga F-testningar. Sammanlagt sju sådana testningar kan göras, varvid man får information om:

1) Skillnaden mellan visuell och auditiv presentation
2) " " en och två presentationer
3) " " omedelbar och fördröjd återgivning

4) Interaktionen mellan presentationssätt och antal presentationer
5) " " presentationssätt och återgivning
6) " " antal presentationer och återgivning
7) " " presentationssätt, antal och återgivning

I undersökningen erhåller de åtta behandlingsgrupperna följande medeltal:

A_1 *visuell*				A_2 *auditiv*			
B_1 *en*		B_2 *två*		B_1 *en*		B_2 *två*	
C_1 *omed.*	C_2 *förd.*	C_1 *omed.*	C_2 *förd.*	C_1 *omed.*	C_2 *förd.*	C_1 *omed.*	C_2 *förd.*
14	12	24	18	12	10	16	14



Ange de genomsnittliga skillnaderna mellan:

A_1 och A_2

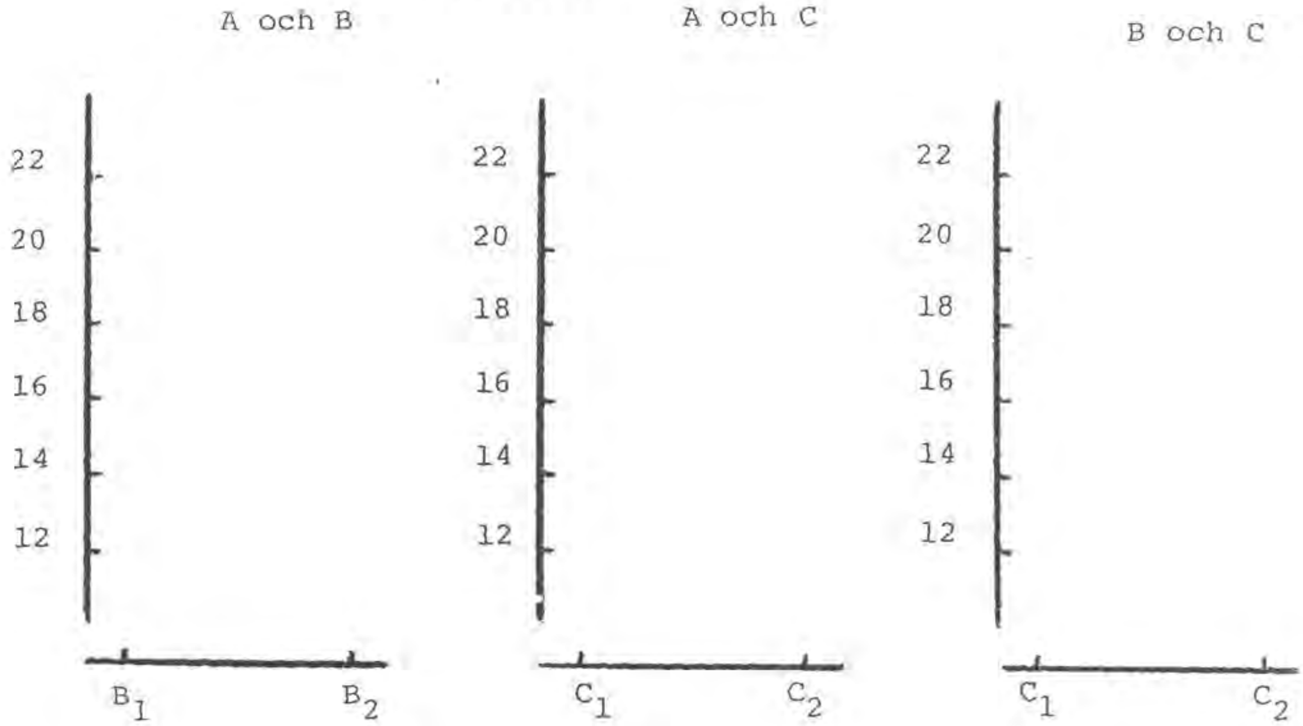
B_1 och B_2

C_1 och C_2

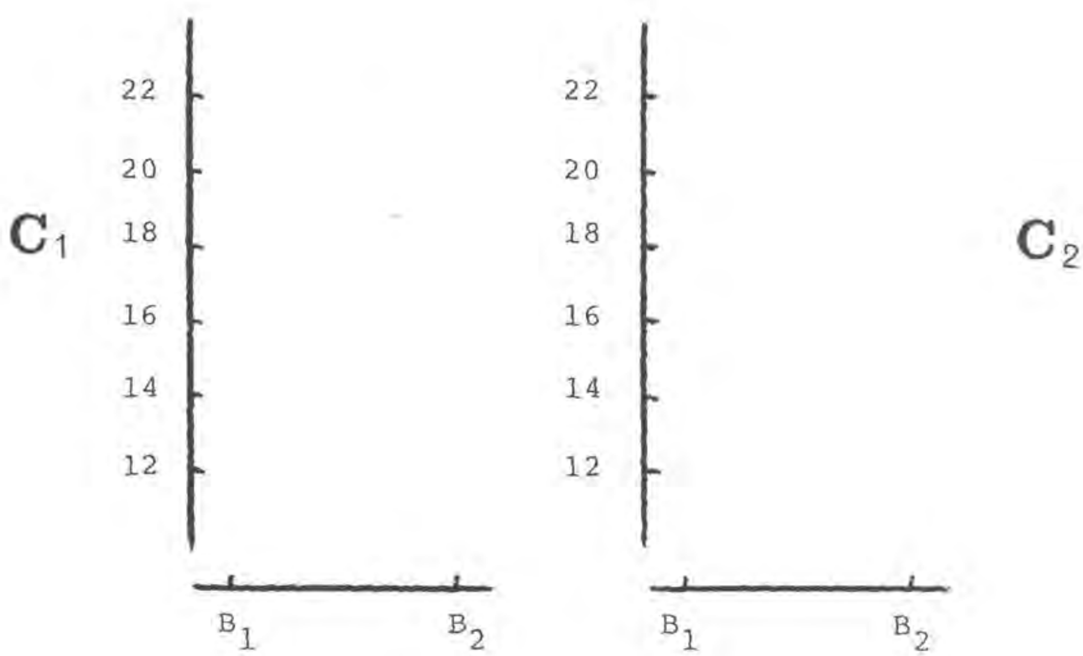
Anser Du skillnaderna realistiska?
Anser Du skillnaderna signifikanta?
Finns det några interaktionseffekter?

Den sista frågan kan belysas med hjälp av några diagram.

Interaktion mellan:



Interaktion mellan A, B och C:



Kapitel 3

KORRELATION OCH REGRESSION

I INTRODUKTION

Innan vi tar steget över från variansanalys till kovariansanalysmetodiken, skall vi uppehålla oss något vid korrelationer och regressioner. Skälet härtill är att kovariansanalysmetoden bygger såväl på variansanalys - som på regressionsmetodik. Vi förutsätter emellertid att flertalet läsare är relativt förtrogna med både korrelations- och regressionskoefficienter, varför genomgången blir relativt kortfattad. För den som vill ha en utförligare framställning av produktmomentkorrelationen hänvisas till Vejde (1965) medan Ferguson (1966) står till förfogande med en mer uttömmande redogörelse för regressionskoefficienter och regressionslinjer.

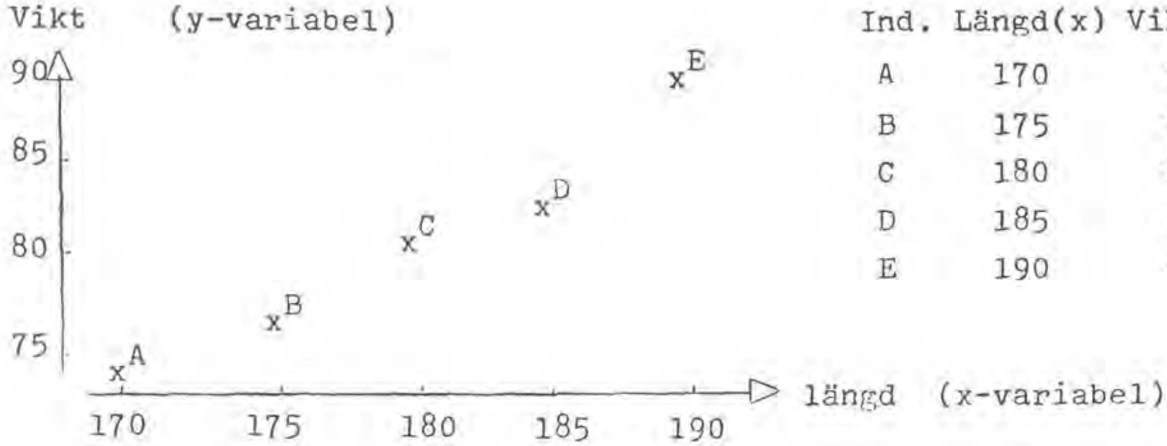
II KORRELATION

Om det föreligger en korrelation (ett samband) mellan två variabler innebär det att en förändring i den ena variabeln åtföljs av en systematisk förändring i den andra variabeln.

Det finns t.ex. en korrelation mellan längd och vikt så att ju längre en människa är desto mera väger hon som regel.

I detta fall är korrelationen positiv därför att när den ena variabeln (längd) ökar så ökar också den andra variabeln (vikt).

Detta visar sig i ett koordinatsystem så:

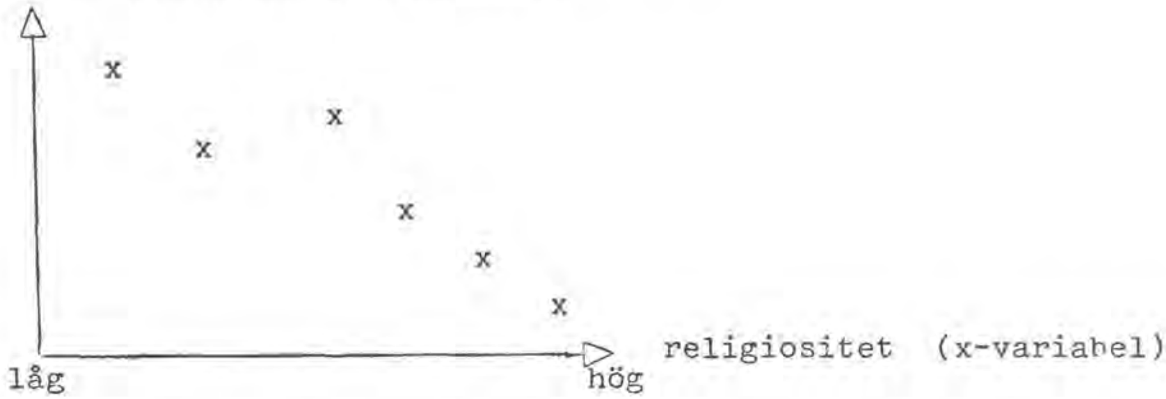


Ind.	Längd(x)	Vikt(y)
A	170	74
B	175	76
C	180	81
D	185	82
E	190	87

Korrelationen kan också vara negativ, vilket innebär att om man har ett högt värde i den ena variabeln motsvaras detta normalt av ett lågt värde i den andra variabeln. T.ex. sambandet mellan antalet svordomar och graden av religiositet (vi antar att religiositeten är en kontinuerlig variabel).

Detta visar sig i ett koordinatsystem så:

antal svordomar (y-variabel)

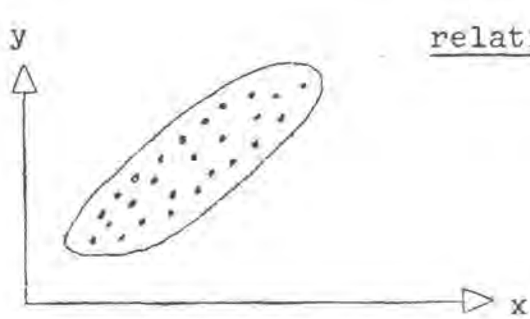


Slutligen kan det saknas samband mellan två variabler. Man säger då att vi har en nollkorrelation. Detta innebär att en förändring i den ena variabeln inte åtföljs av en systematisk förändring i den andra.

Exempel på nollkorrelation: skonummer och intelligens bland vuxna människor.

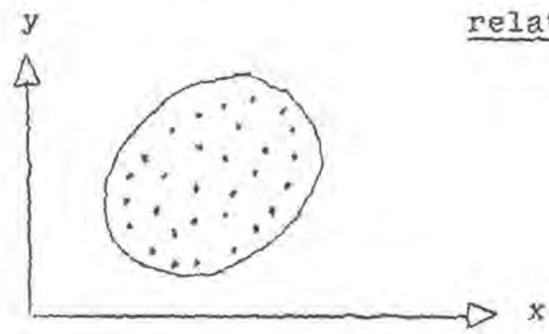
Såväl när det gäller positiv som negativt samband kan graden av samband variera från mycket högt till mycket lågt.

Har vi ett högt samband mellan två variabler innebär det att en ökning i den ena variabeln medför en nästan exakt proportionell ökning i den andra variabeln varigenom alla observationer faller inom elipsen i nedanstående figur.



relativt högt samband

Ju högre sambandet är desto mera långsmal blir elipsen och omvänt desto lägre samband desto mera cirkelformad blir elipsen.



relativt lågt samband

Graden av samband uttrycks med hjälp av en korrelationskoefficient som kan variera från -1 via 0 över till +1.

Om båda variablerna är uttryckta i intervallskala, om fördelningarna är lika i de båda variablerna, samt om sambandet är linjärt, kan detta uttryckas med hjälp av en produktmomentkorrelationskoefficient. Denna koefficient symboliseras av tecknet r eller r_{xy} och kan beräknas utifrån följande formel:

$$r_{xy} = \frac{N\ \Sigma xy - \Sigma x\ \Sigma y}{\sqrt{N\ \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{N\ \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

Exempel:

Elev	prov 1(x)	prov 2(y)	x^2	y^2	$x \cdot y$
1	33	37	1089	1369	1221
2	8	10	64	100	80
3	20	27	400	729	540
4	39	38	1521	1444	1482
5	16	16	256	256	256
6	20	15	400	225	300
7	24	26	576	676	624
8	31	29	961	841	899
9	13	14	169	196	182
10	40	40	1600	1600	1600
	244	252	7036	7436	7184

Beräkning

1) Beräkna Σx
2) Beräkna Σy
3) Beräkna för varje elev x^2 respektive y^2
4) Beräkna Σx^2 respektive Σy^2
5) Beräkna för varje elev $x \cdot y$
6) Beräkna $\Sigma\, xy$
7) Sätt in de olika värdena i formeln enligt följande:

$$r_{xy} = \frac{10 \cdot 7184 - 244 \cdot 252}{\sqrt{10 \cdot 7036 - 244^2} \cdot \sqrt{10 \cdot 7436 - 252^2}} = 0.95$$

För att undersöka om korrelationen är signifikant använder man sig av en t-testning:

$$t = r_{xy} \sqrt{\frac{N-2}{1-r_{xy}^2}}$$

I vårt exempel erhålles följande t-värde :

$$t = 0.95 \sqrt{\frac{10-2}{1-0.95^2}} = 0.95 \sqrt{\frac{8}{0.10}} = 0.95 \sqrt{80} = 8.46$$

Vad innebär detta t-värde?

III REGRESSION

När man har beräknat en produktmomentkorrelationskoefficient, kan man sedan lätt beräkna regressionskoefficienten (b_{yx}), ty:

$$b_{yx} = \frac{S_y}{S_x} \cdot r_{xy}$$

Som framgår av formeln blir $b_{yx} = r_{xy}$, då spridningarna i x och y är lika.

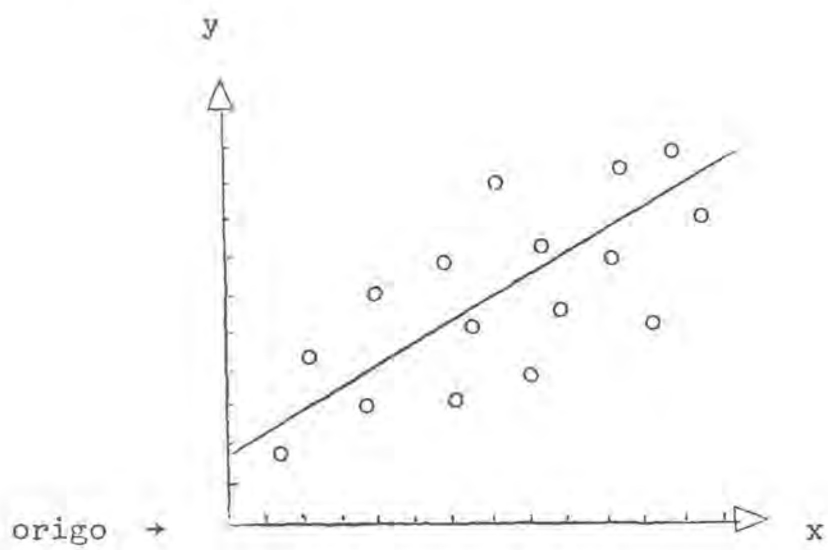
Regressionskoefficienten kan också beräknas direkt:

$$b_{yx} = \frac{\Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y/N)}{\Sigma x^2 - [(\Sigma x)^2/N]}$$

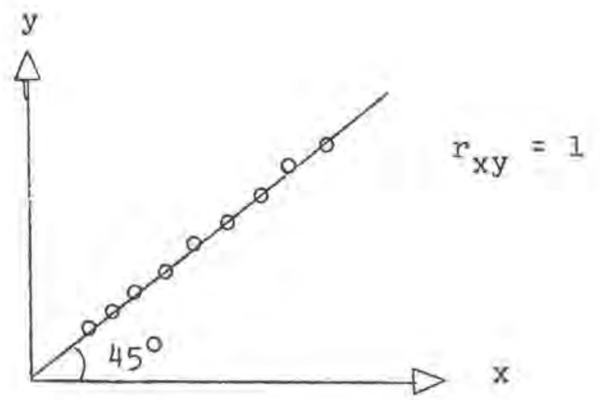
Varför skall man räkna ut regressionskoefficienten? Man måste ha den för att kunna beräkna en <u>regressionslinje</u>, med vars hjälp man sedan kan skatta en individs förväntade värde i y-variabeln utifrån hans värde i x-variabeln.

En regressionslinje visas i figuren nedan. För att kunna lägga in denna i ett koordinatsystem måste man dels känna till regressionskoefficienten som anger linjens lutning, och dels avståndet mellan origo och den punkt där linjen skär y-axeln (a_{yx})

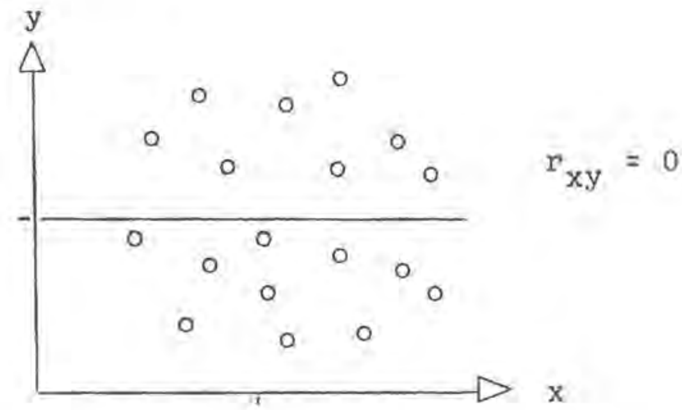
$$a_{yx} = \frac{\Sigma y - b_{yx}\ \Sigma x}{N}$$



Regressionslinjen är dragen på så sätt att summan av de (lodräta) kvadrerade avstånden från de enskilda punkterna når ett minimum. Ju högre korrelationen är, ju starkare lutning får linjen och ju mindre blir summan av de kvadrerade avvikelserna. Om korrelationen är +1 ligger samtliga punkter på linjen och den aktuella kvadratsumman är lika med 0. Om spridningen är lika i x- och y-variabeln har regressionslinjen en lutning på 45^{o}.



Man kan också säga att regressionslinjens lutning anger det genomsnittliga tillskottet i y när x ökar. Om korrelationen är +1 ökar x och y med samma hastighet. Om korrelationen är mindre än 1 ökar y saktare än x, dvs. linjen har en lutning som är mindre än 45°. Om korrelationen är 0 sker det ingen systematisk ökning i y när x växer, ty linjens lutning är 0°.



Liksom man kan beräkna en spridning (standardavvikelse) kring ett medeltal kan man beräkna en spridning runt regressionslinjen. Denna betecknas $S_{y.x}$ och fås genom:

$$S_{y.x} = S_y \sqrt{1-r_{xy}^2}$$

Om spridningen i både x- och y-variabeln är 10, vilka blir då svaren på följande frågor?

a) Vad blir $S_{y.x}$ när $r = 1$?

b) Vad blir $S_{y.x}$ när $r = 0$?

c) Vad blir $S_{y.x}$ när $r = 0.80$?

Vilket förhållande råder mellan spridningen runt regressionslinjen och korrelationens styrka?

I och för sig behöver man inte avläsa en individs förväntade värde (Y') utifrån en regressionslinje i ett koordinatsystem, utan man kan också erhålla det direkt genom följande formel:

$$Y' = \bar{Y} + b_{yx}(X-\bar{X})$$

Om medeltalet i y ($\bar{Y}$) = 50, medeltalet i x ($\bar{X}$) = 50, regressionskoefficienten = 0.80 samt individens x-värde (X) = 60 erhålles följande förväntade y-värde.

$$Y' = 50 + 0.80(60-50) = 58$$

Spridningen kring detta förväntade värde blir:

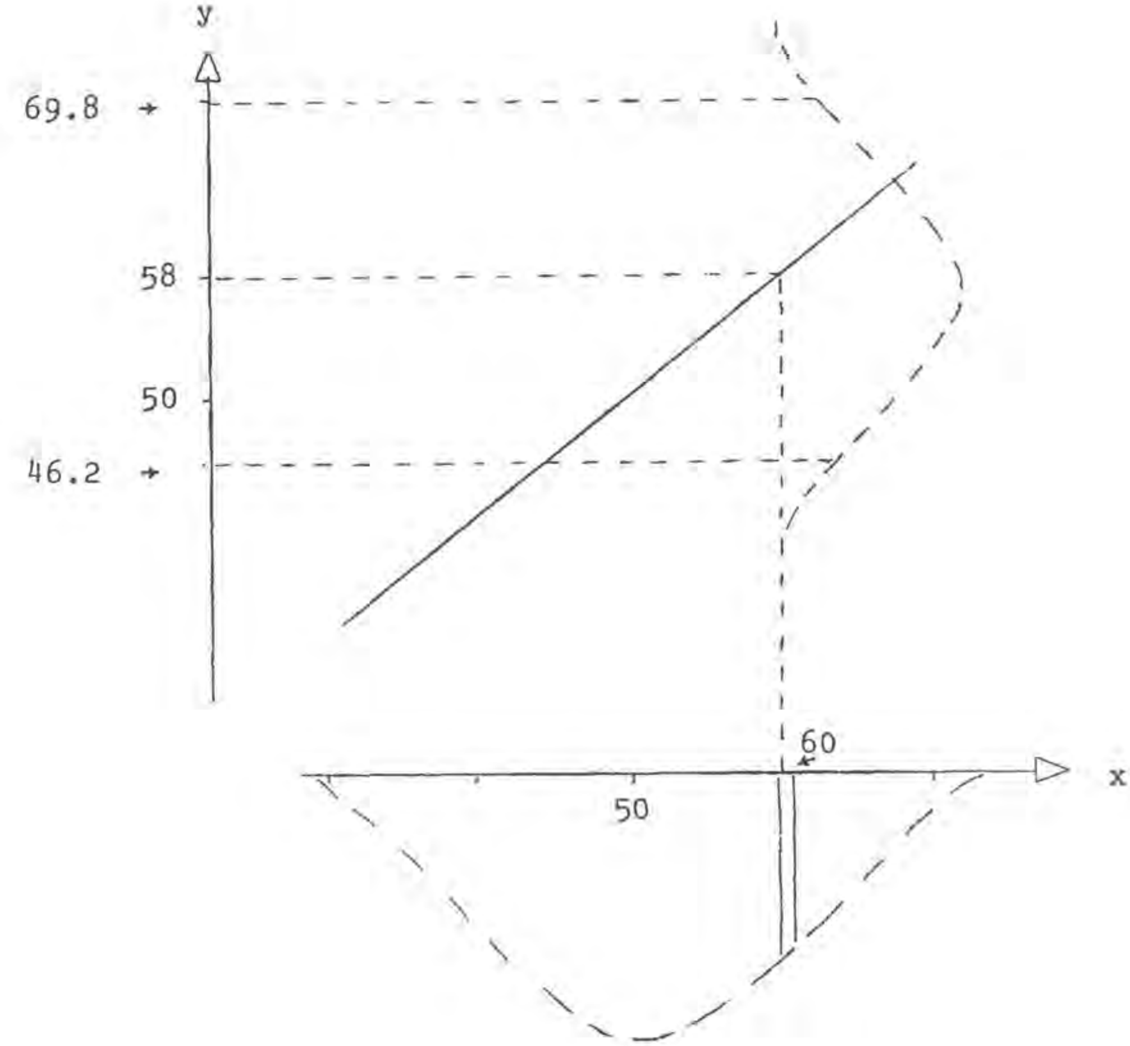
$$s_{y.x} = s_y \sqrt{1-r_{xy}^2} = 10 \sqrt{1-0.80^2} = 6$$

Vilken nytta har vi av dessa upplysningar?

Om en individ har 60 poäng i x-variabeln är hans förväntade värde i y-variabeln 58 poäng. Eftersom korrelationen ej är perfekt finns det dock en viss osäkerhet i vår utsaga. Med 95 % sannolikhet ligger dock hans sanna y-värde inom intervallet:

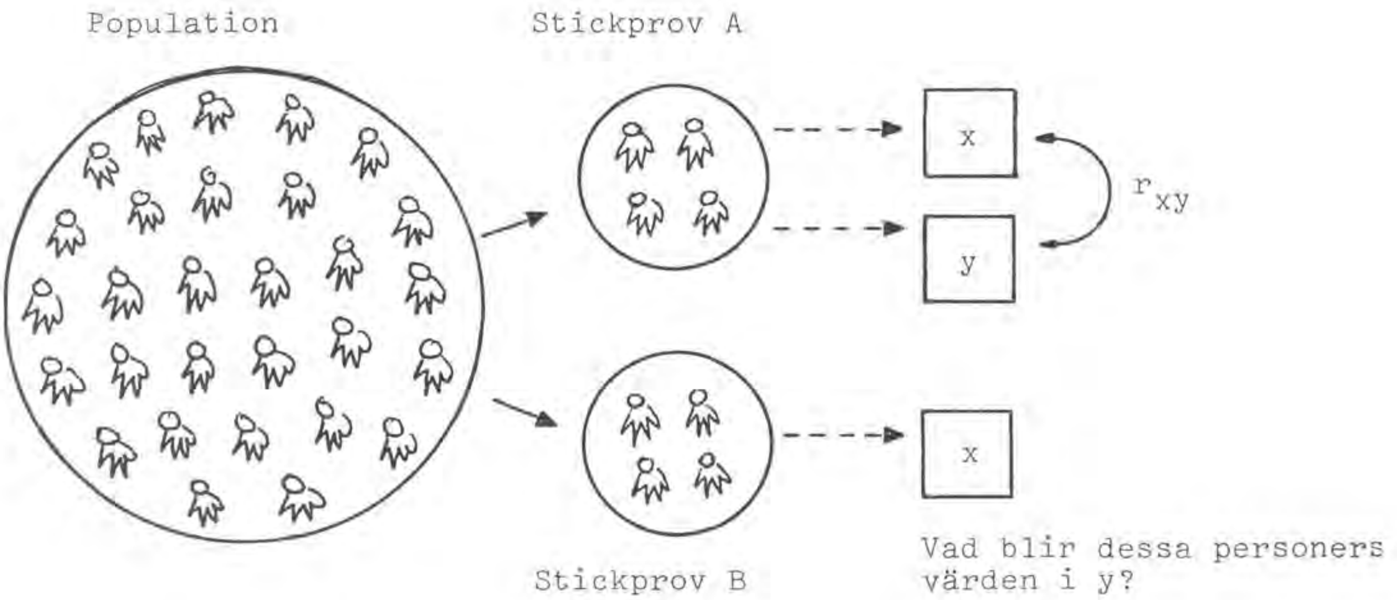
$$58 \pm 1.96 \cdot 6 = 58 \pm 11.8$$

Kan Du förklara varför?



Innan vi slutar detta avsnitt kanske det vore på sin plats att ge en förklaring till varför man överhuvud taget ödslar tid på att räkna ut regressionskoefficienter och regressionslinjer.

Som läsaren förstått hänger begreppet "regression" intimt samman med begreppet "prediktion" och med hjälp av regressionslinjen vill man alltså kunna förutsäga hur en individ beter sig i situationen y utifrån hans beteende i situationen x. För att kunna göra en förutsägelse måste man dock på empirisk väg ha fått fatt på sambandets styrka mellan x och y - ett faktum som vi försökt att åskådliggöra i följande figur.



Läsaren uppmanas att tolka figuren samt ge exempel på vad x och y kan vara för variabler.

Kapitel 4

KOVARIANSANALYS

I INTRODUKTION

Kovariansanalys används då man vill undersöka om det finns några skillnader mellan olika gruppers medeltal i en viss kriterievariabel (y), när hänsyn tagits till skillnaderna mellan gruppernas medeltal i en viss kontrollvariabel (x).

Exempel 1: *Finns det några skillnader i skolprestationer mellan eleven från olika socialgrupper, när hänsyn tagits till skillnaderna i begåvning?*

Exempel 2: *Finns det några skillnader i kunskapsbehållning mellan två grupper som undervisats med olika metoder, när hänsyn tagits till hur många timmar som grupperna undervisats?*

Exempel 3: *Finns det någon skillnad mellan män och kvinnor i långdistanssimning, när hänsyn tagits till fötternas storlek?*

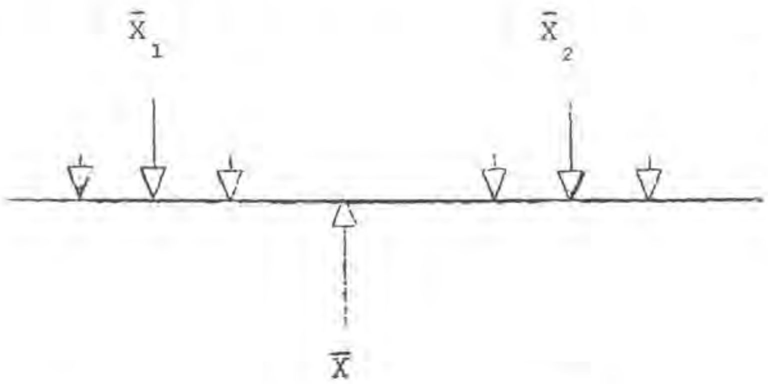
Det sista exemplet är illa valt! Varför?

II SKILLNADER MELLAN VARIANS- OCH KOVARIANSANALYS

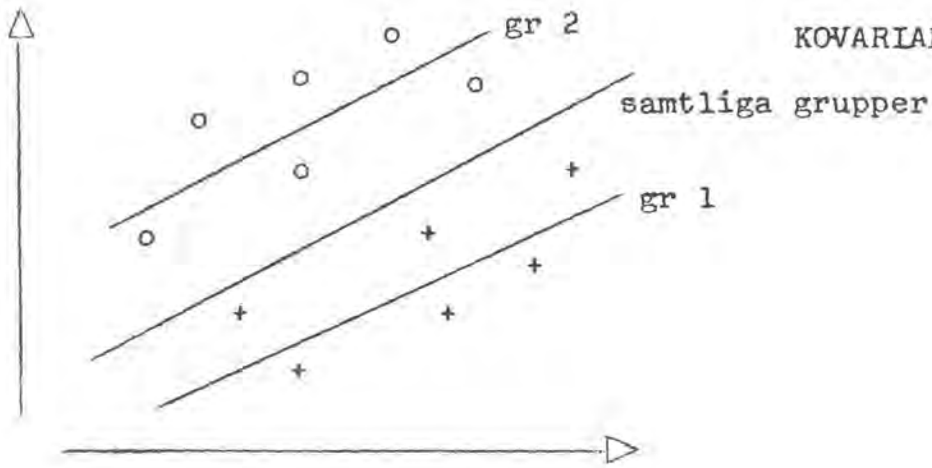
Vid en variansanalys baserar sig inomgruppsvariansmåttet på de individuella avvikelserna från det egna gruppmedeltalet. Mellangruppsvariansmåttet baserar sig på gruppmedeltalens avvikelser från totalmedeltalet.

Vid en kovariansanalys baserar sig inomgruppsvariansmåttet på de individuella avvikelserna från den egna gruppens regressionslinje. Mellangruppsvariansmåttet baserar sig på skillnaderna mellan respektive gruppers regressionslinjer och en för samtliga grupper gemensam regressionslinje.

Försök att markera de aktuella avvikelserna i nedanstående figurer:



VARIANSANALYS



KOVARIANSANALYS

III GRAFISK FRAMSTÄLLNING AV KOVARIANSANALYS

Frågeställning: Finns det några skillnader i standardprovsresultat i engelska mellan barn från olika socialgrupper, när hänsyn tagits till skillnader i verbal begåvning?

X = verbalt intelligenstest

Y = standardprov i engelska

Undersökningsresultat:

Soc.gr.	N	$\bar{X}$	s_x	$\bar{Y}$	s_y	r_{xy}	b_{yx}
1	100	60	10	60	10	0.70	
2	200	55	10	55	10	0.70	
3	400	45	10	45	10	0.70	

Vad blir totalmedeltalet i X respektive Y?

Vad blir b_{yx} i grupp 1, 2 respektive 3?

Vad blir den genomsnittliga korrelationen respektive regressionen inom grupperna?

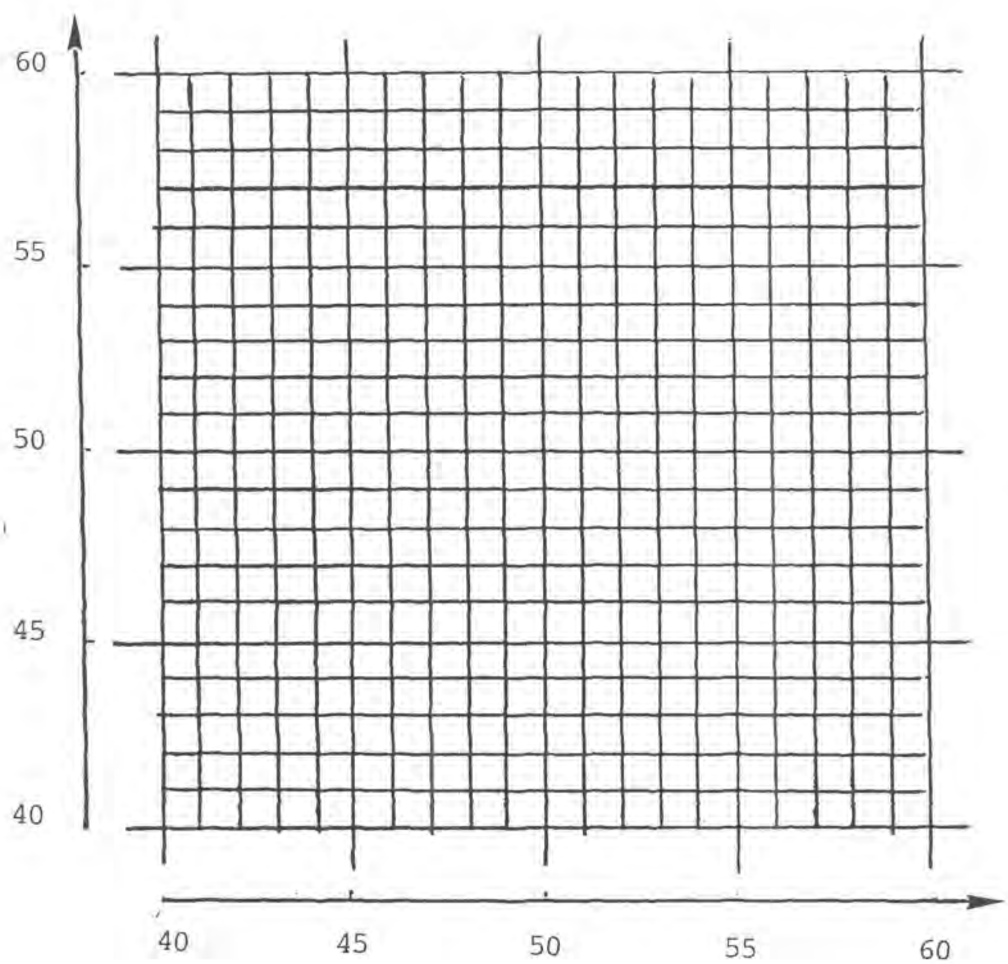
Formel för beräkning av <u>väntade medelvärden</u>:

$$\bar{Y}'_j = \bar{Y} + b_w (\bar{X}_j - \bar{X})$$

Vad blir de väntade värdena för grupp 1, 2 respektive 3?

Lägg in de väntade värdena i diagrammet.

Stp i engelska



Förbind de väntade värdena med en linje.

Vad är detta för en linje?

Lägg in de funna y-medelvärdena i diagrammet.

Drag en lodrät linje genom totalmedelvärdet.

Transportera de funna värdena parallellt med den tidigare inlagda regressionslinjen, tills de når den lodräta linjen. Härigenom får vi fram de justerade värdena, dvs. de medeltal i engelska som grupperna skulle fått, om det ej funnits några skillnader i verbal begåvning.

De linjer som "transporten" ägt rum på, är ingenting annat än gruppernas egna regressionslinjer.

De justerade medeltalen kan också beräknas direkt ur formeln:

$$\bar{Y}_{j_{just}} = \bar{Y}_j - b_w (\bar{X}_j - \bar{X})$$

Kontrollera att formeln ger samma värden, som de ni fått ur diagrammet.

Markera i diagrammet hur stor differensen är mellan grupp 1 och 3 i y-variabeln, dels i ojusterad poäng, dels i justerad poäng. Varför finns det en skillnad även mellan de justerade medeltalen?

Om grupp 1 undervisats med "grammatikmetodik" och grupp 3 med "direktmetodik", kan man då säga att den förra metodiken är överlägsen den senare?

IV SIGNIFIKANSPRÖVNING VID KOVARIANSANALYSER

Liksom en variansanalys utmynnar en kovariansanalys i en F-testning, men med den skillnaden att F-testningen här gäller skillnaderna mellan justerade medeltal. Om F-kvoten blir signifikant får t-testningar följa, för att man skall få kännedom om, vilka justerade medeltal som skiljer sig signifikant åt.

I allmänhet redovisar man ej en kovariansanalys i grafisk form, utan nöjer sig med att ge de justerade medeltalen samt upplyser om eventuella signifikanser. Beräkningsarbetet vid en kovariansanalys är ej speciellt svårt men ganska tidskrävande, varför det oftast sker med hjälp av EDB. Om man vill räkna med händerna finns beräkningsformler bl.a. i:

Kendall,M.G. (1946) och Lindquist,C.F. (1956).

V VILLKOR FÖR KOVARIANSANALYSER

Kovariansanalysmetodiken förutsätter att ett antal villkor är uppfyllda. Dessa villkor - regressionslinearitet, normalitet, varianshomogenitet m.fl. - finns utförligt behandlade hos Lindquist (a.a.) Här skall vi endast uppehålla oss vid ett villkor - kravet på regressionshomogenitet.

För att kunna använda kovariansanalysmetoden på ett meningsfullt sätt förutsätts att gruppernas regressionslinjer har samma lutning. Detta kan man pröva genom en variansanalys av inomgruppsresultaten, där inomgruppsvariansmåttet bygger på individernas avvikelser från de egna gruppernas reella regressionslinjer och mellangruppsvariansmåttet på avvikelserna mellan dessa linjer och linjer som går genom respektive gruppmedeltal, men som alla har samma lutning som den gemensamma inomgruppsregressionslinjen. Om F-kvoten i detta fall blir signifikant är kravet på parallellitet ej uppfyllt, och resultatet av kovariansanalyser blir vanskligt att tolka.

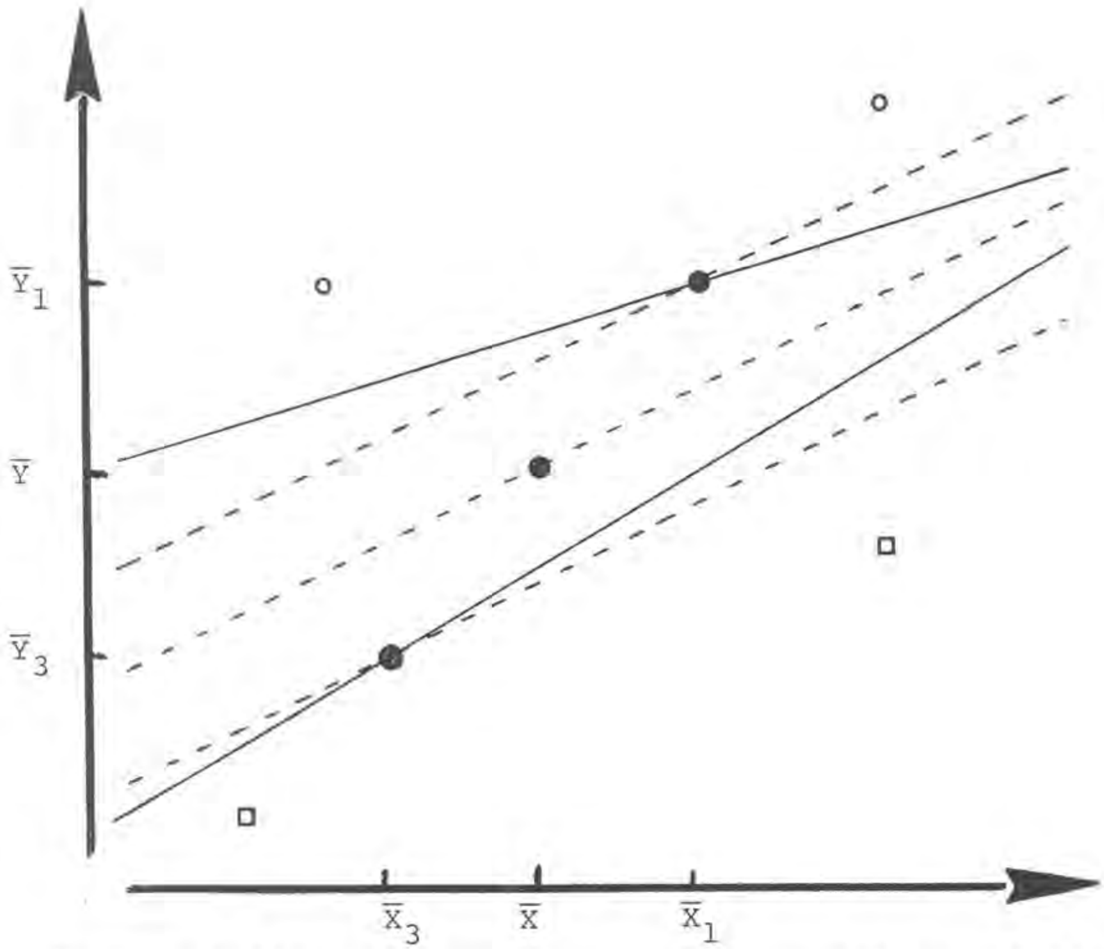
Texten ovan kan möjligen uppfattas som något svårsmält, varför vi ger följande exemplifiering:

I vårt tidigare exempel var samtliga tre gruppers regressionskoefficienter 0.70. Antag i stället att koefficienterna varit följande:

Gr	N	b_{yx}
1	100	0.66
2	200	0.68
3	400	0.72

Även i detta fall blir den genomsnittliga inomgrupps-regressionskoefficienten $(b_w) =$ $= 0.70$. Varför?

I figuren nedan återges gruppernas 1 och 3 reella regressionslinjer - $b_{yx} = 0.66$ respektive 0.72 - samt en linje genom vartdera gruppmedeltal med samma lutning som den gemensamma inomgrupps-regressionslinjen ($b_w = 0.70$). I figuren är lutningsskillnaderna mellan linjerna klart överdrivna.



Markera i figuren de avstånd som ligger till grund för inom- respektive mellangruppsvariansmåttet vid en F-testning av gruppregressionslinjernas parallellitet - dvs. vid en prövning av regressionshomogeniteten.

Ifall F-kvoten ej är signifikant, kan vi således utföra en kovariansanalys, eller hur?

Vad skall vi då göra om F-kvoten blir signifikant? Vilka konsekvenser har detta? Hur ser regressionslinjerna ut? Kan vi överhuvudtaget få några värdefulla upplysningar under sådana förhållanden?

VI NÅGRA AVSLUTANDE SYNPUNKTER

a) Kovariansanalysmetoden är en form av statistisk kontroll som man tillgriper när det är omöjligt eller olämpligt att använda experimentell kontroll.

Giv några exempel på sådana situationer.

b) Kovariansanalysmetoden kan även tillämpas i strikt experimentella undersökningar.

Vilken funktion har metoden då?

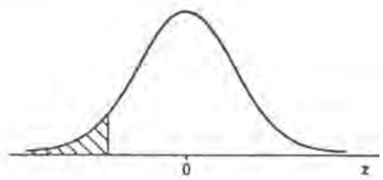
c) För att det skall vara meningsfullt att använda kovariansanalysmetoden måste det finnas en viss korrelation mellan x- och y-variabeln.

Varför?
Hur hög bör korrelationen vara?

d) Om det finns reliabilitetsbrister i x-variabeln, kan kovariansanalysmetoden ge klart felaktiga resultat. En korrektionsmetod har emellertid utarbetats av Härnqvist, vilken finns beskriven i Svensson (1971, s. 153-157).

Tabell 1: Normalfördelningen

Andel av fördelningen(s yta) som ligger till vänster om (under) ett visst z-värde.

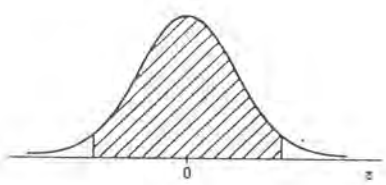


z	Andel (i %) som ligger t.v. om z	z	Andel (i %) som ligger t.v. om z	z	Andel (i %) som ligger t.v. om z
−3,0	0,1	−1,0	15,9	+1,1	86,4
−2,9	0,2	−0,9	18,4	+1,2	88,5
−2,8	0,3	−0,8	21,2	+1,3	90,3
−2,7	0,4	−0,7	24,2	+1,4	91,9
−2,6	0,5	−0,6	27,4	+1,5	93,3
−2,5	0,6	−0,5	30,9	+1,6	94,5
−2,4	0,8	−0,4	34,5	+1,7	95,5
−2,3	1,1	−0,3	38,2	+1,8	96,4
−2,2	1,4	−0,2	42,1	+1,9	97,1
−2,1	1,8	−0,1	46,0	+2,0	97,7
−2,0	2,3	0	50,0	+2,1	98,2
−1,9	2,9	+0,1	54,0	+2,2	98,6
−1,8	3,6	+0,2	57,9	+2,3	98,9
−1,7	4,5	+0,3	61,8	+2,4	99,2
−1,6	5,5	+0,4	65,5	+2,5	99,4
−1,5	6,7	+0,5	69,1	+2,6	99,5
−1,4	8,1	+0,6	72,6	+2,7	99,6
−1,3	9,7	+0,7	75,8	+2,8	99,7
−1,2	11,5	+0,8	78,8	+2,9	99,8
−1,1	13,6	+0,9	81,6	+3,0	99,9
		+1,0	84,1		

Tabell 2: Normalfördelningen

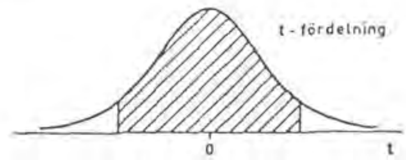
Andel av fördelningen(s yta) som ligger mellan vissa z-värden.

z	Andel som ligger mellan z-värdena
±1,64	90 %
±1,96	95 %
±2,33	98 %
±2,58	99 %



Tabell 3: t-fördelningar

Tabellen anger för olika frihetsgrader (df) de t-värden som mellan sig avgränsar angivna andelar av fördelningen(s yta).



Frihets-grader (df)	Andel mellan $-t$ och $+t$ 90 %	95 %	98 %	99 %
1	6,31	12,71	31,82	63,76
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,01	2,57	3,36	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,35
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,72	2,09	2,53	2,84
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,48	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,70	2,04	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
60	1,67	2,00	2,39	2,66
100	1,66	1,98	2,36	2,63
500	1,65	1,96	2,33	2,59
∞ ($t = z$)	1,64	1,96	2,33	2,58
	10 %	5 %	2 %	1 %
	Andel utanför $-t$ och $+t$			

Tabell 4: Kritiska värden för F

"Magra" siffror anger kritiska värden för 5 %-nivån och "feta" siffror motsvarande värden för 1 %-nivån.

df för nämnaren	Antalet frihetsgrader (df) för täljaren																						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	25
	4052	**4999**	**5403**	**5625**	**5764**	**5859**	**5928**	**5981**	**6022**	**6056**	**6082**	**6106**	**6142**	**6169**	**6208**	**6234**	**6258**	**6286**	**6302**	**6323**	**6334**	**6352**	**6361**	**636**
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40	19.41	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49	19.49	19.50	19.5
	98.49	**99.01**	**99.17**	**99.25**	**99.30**	**99.33**	**99.34**	**99.36**	**99.38**	**99.40**	**99.41**	**99.42**	**99.43**	**99.44**	**99.45**	**99.46**	**99.47**	**99.48**	**99.48**	**99.49**	**99.49**	**99.49**	**99.50**	**99.5**
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.60	8.58	8.57	8.56	8.54	8.54	8.5
	34.12	**30.81**	**29.46**	**28.71**	**28.24**	**27.91**	**27.67**	**27.49**	**27.34**	**27.23**	**27.13**	**27.05**	**26.92**	**26.83**	**26.69**	**26.60**	**26.50**	**26.41**	**26.35**	**26.27**	**26.23**	**26.18**	**26.14**	**26.1**
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91	5.87	5.84	5.80	5.77	5.74	5.71	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.6
	21.20	**18.00**	**16.69**	**15.98**	**15.52**	**15.21**	**14.98**	**14.80**	**14.66**	**14.54**	**14.45**	**14.37**	**14.24**	**14.15**	**14.02**	**13.93**	**13.83**	**13.74**	**13.69**	**13.61**	**13.57**	**13.52**	**13.48**	**13.4**
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70	4.68	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.40	4.38	4.37	4.3
	16.26	**13.27**	**12.06**	**11.39**	**10.97**	**10.67**	**10.45**	**10.27**	**10.15**	**10.05**	**9.96**	**9.89**	**9.77**	**9.68**	**9.55**	**9.47**	**9.38**	**9.29**	**9.24**	**9.17**	**9.13**	**9.07**	**9.04**	**9.0**
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.72	3.71	3.69	3.68	3.6
	13.74	**10.92**	**9.78**	**9.15**	**8.75**	**8.47**	**8.26**	**8.10**	**7.98**	**7.87**	**7.79**	**7.72**	**7.60**	**7.52**	**7.39**	**7.31**	**7.23**	**7.14**	**7.09**	**7.02**	**6.99**	**6.94**	**6.90**	**6.8**
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57	3.52	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.28	3.25	3.24	3.2
	12.25	**9.55**	**8.45**	**7.85**	**7.46**	**7.19**	**7.00**	**6.84**	**6.71**	**6.62**	**6.54**	**6.47**	**6.35**	**6.27**	**6.15**	**6.07**	**5.98**	**5.90**	**5.85**	**5.78**	**5.75**	**5.70**	**5.67**	**5.6**
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28	3.23	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96	2.94	2.9
	11.26	**8.65**	**7.59**	**7.01**	**6.63**	**6.37**	**6.19**	**6.03**	**5.91**	**5.82**	**5.74**	**5.67**	**5.56**	**5.48**	**5.36**	**5.28**	**5.20**	**5.11**	**5.06**	**5.00**	**4.96**	**4.91**	**4.88**	**4.8**
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10	3.07	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86	2.82	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.7
	10.56	**8.02**	**6.99**	**6.42**	**6.06**	**5.80**	**5.62**	**5.47**	**5.35**	**5.26**	**5.18**	**5.11**	**5.00**	**4.92**	**4.80**	**4.73**	**4.64**	**4.56**	**4.51**	**4.45**	**4.41**	**4.36**	**4.33**	**4.3**
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.67	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.5
	10.04	**7.56**	**6.55**	**5.99**	**5.64**	**5.39**	**5.21**	**5.06**	**4.95**	**4.85**	**4.78**	**4.71**	**4.60**	**4.52**	**4.41**	**4.33**	**4.25**	**4.17**	**4.12**	**4.05**	**4.01**	**3.96**	**3.93**	**3.9**
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82	2.79	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.50	2.47	2.45	2.42	2.41	2.4
	9.65	**7.20**	**6.22**	**5.67**	**5.32**	**5.07**	**4.88**	**4.74**	**4.63**	**4.54**	**4.46**	**4.40**	**4.29**	**4.21**	**4.10**	**4.02**	**3.94**	**3.86**	**3.80**	**3.74**	**3.70**	**3.66**	**3.62**	**3.6**
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72	2.69	2.64	2.60	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.32	2.31	2.3
	9.33	**6.93**	**5.95**	**5.41**	**5.06**	**4.82**	**4.65**	**4.50**	**4.39**	**4.30**	**4.22**	**4.16**	**4.05**	**3.98**	**3.86**	**3.78**	**3.70**	**3.61**	**3.56**	**3.49**	**3.46**	**3.41**	**3.38**	**3.3**
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63	2.60	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.32	2.28	2.26	2.24	2.22	2.2
	9.07	**6.70**	**5.74**	**5.20**	**4.86**	**4.62**	**4.44**	**4.30**	**4.19**	**4.10**	**4.02**	**3.96**	**3.85**	**3.78**	**3.67**	**3.59**	**3.51**	**3.42**	**3.37**	**3.30**	**3.27**	**3.21**	**3.18**	**3.1**
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53	2.48	2.44	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.21	2.19	2.16	2.14	2.1
	8.86	**6.51**	**5.56**	**5.03**	**4.69**	**4.46**	**4.28**	**4.14**	**4.03**	**3.94**	**3.86**	**3.80**	**3.70**	**3.62**	**3.51**	**3.43**	**3.34**	**3.26**	**3.21**	**3.14**	**3.11**	**3.06**	**3.02**	**3.0**
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.70	2.64	2.59	2.55	2.51	2.48	2.43	2.39	2.33	2.29	2.25	2.21	2.18	2.15	2.12	2.10	2.08	2.0
	8.68	**6.36**	**5.42**	**4.89**	**4.56**	**4.32**	**4.14**	**4.00**	**3.89**	**3.80**	**3.73**	**3.67**	**3.56**	**3.48**	**3.36**	**3.29**	**3.20**	**3.12**	**3.07**	**3.00**	**2.97**	**2.92**	**2.89**	**2.8**
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42	2.37	2.33	2.28	2.24	2.20	2.16	2.13	2.09	2.07	2.04	2.02	2.0
	8.53	**6.23**	**5.29**	**4.77**	**4.44**	**4.20**	**4.03**	**3.89**	**3.78**	**3.69**	**3.61**	**3.55**	**3.45**	**3.37**	**3.25**	**3.18**	**3.10**	**3.01**	**2.96**	**2.89**	**2.86**	**2.80**	**2.77**	**2.7**
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41	2.38	2.33	2.29	2.23	2.19	2.15	2.11	2.08	2.04	2.02	1.99	1.97	1.9
	8.40	**6.11**	**5.18**	**4.67**	**4.34**	**4.10**	**3.93**	**3.79**	**3.68**	**3.59**	**3.52**	**3.45**	**3.35**	**3.27**	**3.16**	**3.08**	**3.00**	**2.92**	**2.86**	**2.79**	**2.76**	**2.70**	**2.67**	**2.6**
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.29	2.25	2.19	2.15	2.11	2.07	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.9
	8.28	**6.01**	**5.09**	**4.58**	**4.25**	**4.01**	**3.85**	**3.71**	**3.60**	**3.51**	**3.44**	**3.37**	**3.27**	**3.19**	**3.07**	**3.00**	**2.91**	**2.83**	**2.78**	**2.71**	**2.68**	**2.62**	**2.59**	**2.5**
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.55	2.48	2.43	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21	2.15	2.11	2.07	2.02	2.00	1.96	1.94	1.91	1.90	1.8
	8.18	**5.93**	**5.01**	**4.50**	**4.17**	**3.94**	**3.77**	**3.63**	**3.52**	**3.43**	**3.36**	**3.30**	**3.19**	**3.12**	**3.00**	**2.92**	**2.84**	**2.76**	**2.70**	**2.63**	**2.60**	**2.54**	**2.51**	**2.4**
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31	2.28	2.23	2.18	2.12	2.08	2.04	1.99	1.96	1.92	1.90	1.87	1.85	1.8
	8.10	**5.85**	**4.94**	**4.43**	**4.10**	**3.87**	**3.71**	**3.56**	**3.45**	**3.37**	**3.30**	**3.23**	**3.13**	**3.05**	**2.94**	**2.86**	**2.77**	**2.69**	**2.63**	**2.56**	**2.53**	**2.47**	**2.44**	**2.4**
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.20	2.15	2.09	2.05	2.00	1.96	1.93	1.89	1.87	1.84	1.82	1.8
	8.02	**5.78**	**4.87**	**4.37**	**4.04**	**3.81**	**3.65**	**3.51**	**3.40**	**3.31**	**3.24**	**3.17**	**3.07**	**2.99**	**2.88**	**2.80**	**2.72**	**2.63**	**2.58**	**2.51**	**2.47**	**2.42**	**2.38**	**2.3**
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.47	2.40	2.35	2.30	2.26	2.23	2.18	2.13	2.07	2.03	1.98	1.93	1.91	1.87	1.84	1.81	1.80	1.7
	7.94	**5.72**	**4.82**	**4.31**	**3.99**	**3.76**	**3.59**	**3.45**	**3.35**	**3.26**	**3.18**	**3.12**	**3.02**	**2.94**	**2.83**	**2.75**	**2.67**	**2.58**	**2.53**	**2.46**	**2.42**	**2.37**	**2.33**	**2.3**
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.45	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20	2.14	2.10	2.04	2.00	1.96	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.7
	7.88	**5.66**	**4.76**	**4.26**	**3.94**	**3.71**	**3.54**	**3.41**	**3.30**	**3.21**	**3.14**	**3.07**	**2.97**	**2.89**	**2.78**	**2.70**	**2.62**	**2.53**	**2.48**	**2.41**	**2.37**	**2.32**	**2.28**	**2.2**
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.43	2.36	2.30	2.26	2.22	2.18	2.13	2.09	2.02	1.98	1.94	1.89	1.86	1.82	1.80	1.76	1.74	1.7
	7.82	**5.61**	**4.72**	**4.22**	**3.90**	**3.67**	**3.50**	**3.36**	**3.25**	**3.17**	**3.09**	**3.03**	**2.93**	**2.85**	**2.74**	**2.66**	**2.58**	**2.49**	**2.44**	**2.36**	**2.33**	**2.27**	**2.23**	**2.2**

Tabell 4: <u>forts.</u>

df för nämna-ren	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
	Antalet frihetsgrader (df) för täljaren																							
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.11	2.06	2.00	1.96	1.92	1.87	1.84	1.80	1.77	1.74	1.72	1.71
	7.77	**5.57**	**4.68**	**4.18**	**3.86**	**3.63**	**3.46**	**3.32**	**3.21**	**3.13**	**3.05**	**2.99**	**2.89**	**2.81**	**2.70**	**2.62**	**2.54**	**2.45**	**2.40**	**2.32**	**2.29**	**2.23**	**2.19**	**2.17**
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.10	2.05	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.78	1.76	1.72	1.70	1.69
	7.72	**5.53**	**4.64**	**4.14**	**3.82**	**3.59**	**3.42**	**3.29**	**3.17**	**3.09**	**3.02**	**2.96**	**2.86**	**2.77**	**2.66**	**2.53**	**2.50**	**2.41**	**2.36**	**2.28**	**2.25**	**2.19**	**2.15**	**2.13**
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.30	2.25	2.20	2.16	2.13	2.08	2.03	1.97	1.93	1.88	1.84	1.80	1.76	1.74	1.71	1.68	1.67
	7.68	**5.49**	**4.60**	**4.11**	**3.79**	**3.56**	**3.39**	**3.26**	**3.14**	**3.06**	**2.98**	**2.93**	**2.83**	**2.74**	**2.63**	**2.55**	**2.47**	**2.38**	**2.33**	**2.25**	**2.21**	**2.16**	**2.12**	**2.10**
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.06	2.02	1.96	1.91	1.87	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67	1.65
	7.64	**5.45**	**4.57**	**4.07**	**3.76**	**3.53**	**3.36**	**3.23**	**3.11**	**3.03**	**2.95**	**2.90**	**2.80**	**2.71**	**2.60**	**2.52**	**2.44**	**2.35**	**2.30**	**2.22**	**2.18**	**2.13**	**2.09**	**2.06**
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.05	2.00	1.94	1.90	1.85	1.80	1.77	1.73	1.71	1.68	1.65	1.64
	7.60	**5.42**	**4.54**	**4.04**	**3.73**	**3.50**	**3.33**	**3.20**	**3.08**	**3.00**	**2.92**	**2.87**	**2.77**	**2.68**	**2.57**	**2.49**	**2.41**	**2.32**	**2.27**	**2.19**	**2.15**	**2.10**	**2.06**	**2.03**
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.04	1.99	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	1.62
	7.56	**5.39**	**4.51**	**4.02**	**3.70**	**3.47**	**3.30**	**3.17**	**3.06**	**2.98**	**2.90**	**2.84**	**2.74**	**2.66**	**2.55**	**2.47**	**2.38**	**2.29**	**2.24**	**2.16**	**2.13**	**2.07**	**2.03**	**2.01**
32	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.32	2.25	2.19	2.14	2.10	2.07	2.02	1.97	1.91	1.86	1.82	1.76	1.74	1.69	1.67	1.64	1.61	1.59
	7.50	**5.34**	**4.46**	**3.97**	**3.66**	**3.42**	**3.25**	**3.12**	**3.01**	**2.94**	**2.86**	**2.80**	**2.70**	**2.62**	**2.51**	**2.42**	**2.34**	**2.25**	**2.20**	**2.12**	**2.08**	**2.02**	**1.98**	**1.96**
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.30	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05	2.00	1.95	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.67	1.64	1.61	1.59	1.57
	7.44	**5.29**	**4.42**	**3.93**	**3.61**	**3.38**	**3.21**	**3.08**	**2.97**	**2.89**	**2.82**	**2.76**	**2.66**	**2.58**	**2.47**	**2.38**	**2.30**	**2.21**	**2.15**	**2.03**	**2.04**	**1.98**	**1.94**	**1.91**
36	4.11	3.26	2.86	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.10	2.06	2.03	1.98	1.93	1.87	1.82	1.78	1.72	1.69	1.65	1.62	1.59	1.56	1.55
	7.39	**5.25**	**4.38**	**3.89**	**3.58**	**3.35**	**3.18**	**3.04**	**2.94**	**2.86**	**2.78**	**2.72**	**2.62**	**2.54**	**2.43**	**2.35**	**2.26**	**2.17**	**2.12**	**2.04**	**2.00**	**1.94**	**1.90**	**1.87**
38	4.10	3.25	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02	1.96	1.92	1.85	1.80	1.76	1.71	1.67	1.63	1.60	1.57	1.54	1.53
	7.35	**5.21**	**4.34**	**3.86**	**3.54**	**3.32**	**3.15**	**3.02**	**2.91**	**2.82**	**2.75**	**2.69**	**2.59**	**2.51**	**2.40**	**2.32**	**2.22**	**2.14**	**2.08**	**2.00**	**1.97**	**1.90**	**1.86**	**1.84**
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.07	2.04	2.00	1.95	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51
	7.31	**5.18**	**4.31**	**3.83**	**3.51**	**3.29**	**3.12**	**2.99**	**2.88**	**2.80**	**2.73**	**2.66**	**2.56**	**2.49**	**2.37**	**2.29**	**2.20**	**2.11**	**2.05**	**1.97**	**1.94**	**1.88**	**1.84**	**1.81**
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	2.02	1.99	1.94	1.89	1.82	1.78	1.73	1.68	1.64	1.60	1.57	1.54	1.51	1.49
	7.27	**5.15**	**4.29**	**3.80**	**3.49**	**3.26**	**3.10**	**2.96**	**2.86**	**2.77**	**2.70**	**2.64**	**2.54**	**2.46**	**2.35**	**2.26**	**2.17**	**2.08**	**2.02**	**1.94**	**1.91**	**1.85**	**1.80**	**1.78**
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	2.01	1.98	1.92	1.88	1.81	1.76	1.72	1.66	1.63	1.58	1.56	1.52	1.50	1.48
	7.24	**5.12**	**4.26**	**3.78**	**3.46**	**3.24**	**3.07**	**2.94**	**2.84**	**2.75**	**2.68**	**2.62**	**2.52**	**2.44**	**2.32**	**2.24**	**2.15**	**2.06**	**2.00**	**1.92**	**1.88**	**1.82**	**1.78**	**1.75**
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.14	2.09	2.04	2.00	1.97	1.91	1.87	1.80	1.75	1.71	1.65	1.62	1.57	1.54	1.51	1.48	1.46
	7.21	**5.10**	**4.24**	**3.76**	**3.44**	**3.22**	**3.05**	**2.92**	**2.82**	**2.73**	**2.66**	**2.60**	**2.50**	**2.42**	**2.30**	**2.22**	**2.13**	**2.04**	**1.98**	**1.90**	**1.86**	**1.80**	**1.76**	**1.72**
48	4.04	3.19	2.80	2.56	2.41	2.30	2.21	2.14	2.08	2.03	1.99	1.96	1.90	1.86	1.79	1.74	1.70	1.64	1.61	1.56	1.53	1.50	1.47	1.45
	7.19	**5.08**	**4.22**	**3.74**	**3.42**	**3.20**	**3.04**	**2.90**	**2.80**	**2.71**	**2.64**	**2.58**	**2.48**	**2.40**	**2.28**	**2.20**	**2.11**	**2.02**	**1.96**	**1.88**	**1.84**	**1.78**	**1.73**	**1.70**
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.02	1.98	1.95	1.90	1.85	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.55	1.52	1.48	1.46	1.44
	7.17	**5.06**	**4.20**	**3.72**	**3.41**	**3.18**	**3.02**	**2.88**	**2.78**	**2.70**	**2.62**	**2.56**	**2.46**	**2.39**	**2.26**	**2.18**	**2.10**	**2.00**	**1.94**	**1.86**	**1.82**	**1.76**	**1.71**	**1.68**
55	4.02	3.17	2.78	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.05	2.00	1.97	1.93	1.88	1.83	1.76	1.72	1.67	1.61	1.58	1.52	1.50	1.46	1.43	1.41
	7.12	**5.01**	**4.16**	**3.68**	**3.37**	**3.15**	**2.98**	**2.85**	**2.75**	**2.66**	**2.59**	**2.53**	**2.43**	**2.35**	**2.23**	**2.15**	**2.06**	**1.96**	**1.90**	**1.82**	**1.78**	**1.71**	**1.66**	**1.64**
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.86	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.50	1.48	1.44	1.41	1.39
	7.08	**4.98**	**4.13**	**3.65**	**3.34**	**3.12**	**2.95**	**2.82**	**2.72**	**2.63**	**2.56**	**2.50**	**2.40**	**2.32**	**2.20**	**2.12**	**2.03**	**1.93**	**1.87**	**1.79**	**1.74**	**1.68**	**1.63**	**1.60**
65	3.99	3.14	2.75	2.51	2.36	2.24	2.15	2.08	2.02	1.98	1.94	1.90	1.85	1.80	1.73	1.68	1.63	1.57	1.54	1.49	1.46	1.42	1.39	1.37
	7.04	**4.95**	**4.10**	**3.62**	**3.31**	**3.09**	**2.93**	**2.79**	**2.70**	**2.61**	**2.54**	**2.47**	**2.37**	**2.30**	**2.18**	**2.09**	**2.00**	**1.90**	**1.84**	**1.76**	**1.71**	**1.64**	**1.60**	**1.56**
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.01	1.97	1.93	1.89	1.84	1.79	1.72	1.67	1.62	1.56	1.53	1.47	1.45	1.40	1.37	1.35
	7.01	**4.92**	**4.08**	**3.60**	**3.29**	**3.07**	**2.91**	**2.77**	**2.67**	**2.59**	**2.51**	**2.45**	**2.35**	**2.28**	**2.15**	**2.07**	**1.98**	**1.88**	**1.82**	**1.74**	**1.69**	**1.62**	**1.56**	**1.53**
80	3.96	3.11	2.72	2.48	2.33	2.21	2.12	2.05	1.99	1.95	1.91	1.88	1.82	1.77	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.45	1.42	1.38	1.35	1.32
	6.96	**4.88**	**4.04**	**3.56**	**3.25**	**3.04**	**2.87**	**2.74**	**2.64**	**2.55**	**2.46**	**2.41**	**2.32**	**2.24**	**2.11**	**2.03**	**1.94**	**1.84**	**1.78**	**1.70**	**1.65**	**1.57**	**1.52**	**1.49**
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.30	2.19	2.10	2.03	1.97	1.92	1.88	1.85	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.48	1.42	1.39	1.34	1.30	[illegible]
	6.90	**4.82**	**3.98**	**3.51**	**3.20**	**2.99**	**2.82**	**2.69**	**2.59**	**2.51**	**2.43**	**2.36**	**2.26**	**2.19**	**2.06**	**1.98**	**1.89**	**1.79**	**1.73**	**1.64**	**1.59**	**1.51**	**1.46**	[illegible]
125	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.95	1.90	1.86	1.83	1.77	1.72	1.65	1.60	1.55	1.49	1.45	1.39	1.36	1.31	1.27	[illegible]
	6.84	**4.78**	**3.94**	**3.47**	**3.17**	**2.95**	**2.79**	**2.65**	**2.56**	**2.47**	**2.40**	**2.33**	**2.23**	**2.15**	**2.03**	**1.94**	**1.85**	**1.75**	**1.68**	**1.59**	**1.54**	**1.46**	**1.40**	[illegible]
150	3.91	3.06	2.67	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.85	1.82	1.76	1.71	1.64	1.59	1.54	1.47	1.44	1.37	1.34	1.29	1.25	[illegible]
	6.81	**4.75**	**3.91**	**3.44**	**3.14**	**2.92**	**2.76**	**2.62**	**2.53**	**2.44**	**2.37**	**2.30**	**2.20**	**2.12**	**2.00**	**1.91**	**1.83**	**1.72**	**1.66**	**1.56**	**1.51**	**1.43**	**1.37**	[illegible]
200	3.89	3.04	2.65	2.41	2.26	2.14	2.05	1.98	1.92	1.87	1.83	1.80	1.74	1.69	1.62	1.57	1.52	1.45	1.42	1.35	1.32	1.26	1.22	[illegible]
	6.76	**4.71**	**3.88**	**3.41**	**3.11**	**2.90**	**2.73**	**2.60**	**2.50**	**2.41**	**2.34**	**2.28**	**2.17**	**2.09**	**1.97**	**1.88**	**1.79**	**1.69**	**1.62**	**1.53**	**1.48**	**1.39**	**1.33**	[illegible]
400	3.86	3.02	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.81	1.78	1.72	1.67	1.60	1.54	1.49	1.42	1.38	1.32	1.28	1.22	1.16	[illegible]
	6.70	**4.66**	**3.83**	**3.36**	**3.06**	**2.85**	**2.69**	**2.55**	**2.46**	**2.37**	**2.29**	**2.23**	**2.12**	**2.04**	**1.92**	**1.84**	**1.74**	**1.64**	**1.57**	**1.47**	**1.42**	**1.32**	**1.24**	[illegible]
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.10	2.02	1.95	1.89	1.84	1.80	1.76	1.70	1.65	1.58	1.53	1.47	1.41	1.36	1.30	1.26	1.19	1.13	[illegible]
	6.66	**4.62**	**3.80**	**3.34**	**3.04**	**2.82**	**2.66**	**2.53**	**2.43**	**2.34**	**2.26**	**2.20**	**2.09**	**2.01**	**1.89**	**1.81**	**1.71**	**1.61**	**1.54**	**1.44**	**1.38**	**1.28**	**1.19**	[illegible]
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.69	1.64	1.57	1.52	1.46	1.40	1.35	1.28	1.24	1.17	1.11	1.00
	6.64	**4.60**	**3.78**	**3.32**	**3.02**	**2.80**	**2.64**	**2.51**	**2.41**	**2.32**	**2.24**	**2.18**	**2.07**	**1.99**	**1.87**	**1.79**	**1.69**	**1.59**	**1.52**	**1.41**	**1.36**	**1.25**	**1.15**	**1.00**

Kvadrater på talen 1—499.

Tal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
10	10000	10201	10404	10609	10816	11025	11236	11449	11664	11881
11	12100	12321	12544	12769	12996	13225	13456	13689	13924	14161
12	14400	14641	14884	15129	15376	15625	15876	16129	16384	16641
13	16900	17161	17424	17689	17956	18225	18496	18769	19044	19321
14	19600	19881	20164	20449	20736	21025	21316	21609	21904	22201
15	22500	22801	23104	23409	23716	24025	24336	24649	24964	25281
16	25600	25921	26244	26569	26896	27225	27556	27889	28224	28561
17	28900	29241	29584	29929	30276	30625	30976	31329	31684	32041
18	32400	32761	33124	33489	33856	34225	34596	34969	35344	35721
19	36100	36481	36864	37249	37636	38025	38416	38809	39204	39601
20	40000	40401	40804	41209	41616	42025	42436	42849	43264	43681
21	44100	44521	44944	45369	45796	46225	46656	47089	47524	47961
22	48400	48841	49284	49729	50176	50625	51076	51529	51984	52441
23	52900	53361	53824	54289	54756	55225	55696	56169	56644	57121
24	57600	58081	58564	59049	59536	60025	60516	61009	61504	62001
25	62500	63001	63504	64009	64516	65025	65536	66049	66564	67081
26	67600	68121	68644	69169	69696	70225	70756	71289	71824	72361
27	72900	73441	73984	74529	75076	75625	76176	76729	77284	77841
28	78400	78961	79524	80089	80656	81225	81796	82369	82944	83521
29	84100	84681	85264	85849	86436	87025	87616	88209	88804	89401
30	90000	90601	91204	91809	92416	93025	93636	94249	94864	95481
31	96100	96721	97344	97969	98596	99225	99856	100489	101124	101761
32	102400	103041	103684	104329	104976	105625	106276	106929	107584	108241
33	108900	109561	110224	110889	111556	112225	112896	113569	114244	114921
34	115600	116281	116964	117649	118336	119025	119716	120409	121104	121801
35	122500	123201	123904	124609	125316	126025	126736	127449	128164	128881
36	129600	130321	131044	131769	132496	133225	133956	134689	135424	136161
37	136900	137641	138384	139129	139876	140625	141376	142129	142884	143641
38	144400	145161	145924	146689	147456	148225	148996	149769	150544	151321
39	152100	152881	153664	154449	155236	156025	156816	157609	158404	159201
40	160000	160801	161604	162409	163216	164025	164836	165649	166464	167281
41	168100	168921	169744	170569	171396	172225	173056	173889	174724	175561
42	176400	177241	178084	178929	179776	180625	181476	182329	183184	184041
43	184900	185761	186624	187489	188356	189225	190096	190969	191844	192721
44	193600	194481	195364	196249	197136	198025	198916	199809	200704	201601
45	202500	203401	204304	205209	206116	207025	207936	208849	209764	210681
46	211600	212521	213444	214369	215296	216225	217156	218089	219024	219961
47	220900	221841	222784	223729	224676	225625	226576	227529	228484	229441
48	230400	231361	232324	233289	234256	235225	236196	237169	238144	239121
49	240100	241081	242064	243049	244036	245025	246016	247009	248004	249001
Tal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Kvadrater på talen 500—999.

Tal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	250000	251001	252004	253009	254016	255025	256036	257049	258064	259081
51	260100	261121	262144	263169	264196	265225	266256	267289	268324	269361
52	270400	271441	272484	273529	274576	275625	276676	277729	278784	279841
53	280900	281961	283024	284089	285156	286225	287296	288369	289444	290521
54	291600	292681	293764	294849	295936	297025	298116	299209	300304	301401
55	302500	303601	304704	305809	306916	308025	309136	310249	311364	312481
56	313600	314721	315844	316969	318096	319225	320356	321489	322624	323761
57	324900	326041	327184	328329	329476	330625	331776	332929	334084	335241
58	336400	337561	338724	339889	341056	342225	343396	344569	345744	346921
59	348100	349281	350464	351649	352836	354025	355216	356409	357604	358801
60	360000	361201	362404	363609	364816	366025	367236	368449	369664	370881
61	372100	373321	374544	375769	376996	378225	379456	380689	381924	383161
62	384400	385641	386884	388129	389376	390625	391876	393129	394384	395641
63	396900	398161	399424	400689	401956	403225	404496	405769	407044	408321
64	409600	410881	412164	413449	414736	416025	417316	418609	419904	421201
65	422500	423801	425104	426409	427716	429025	430336	431649	432964	434281
66	435600	436921	438244	439569	440896	442225	443556	444889	446224	447561
67	448900	450241	451584	452929	454276	455625	456976	458329	459684	461041
68	462400	463761	465124	466489	467856	469225	470596	471969	473344	474721
69	476100	477481	478864	480249	481636	483025	484416	485809	487204	488601
70	490000	491401	492804	494209	495616	497025	498436	499849	501264	502681
71	504100	505521	506944	508369	509796	511225	512656	514089	515524	516961
72	518400	519841	521284	522729	524176	525625	527076	528529	529984	531441
73	532900	534361	535824	537289	538756	540225	541696	543169	544644	546121
74	547600	549081	550564	552049	553536	555025	556516	558009	559504	561001
75	562500	564001	565504	567009	568516	570025	571536	573049	574564	576081
76	577600	579121	580644	582169	583696	585225	586756	588289	589824	591361
77	592900	594441	595984	597529	599076	600625	602176	603729	605284	606841
78	608400	609961	611524	613089	614656	616225	617796	619369	620944	622521
79	624100	625681	627264	628849	630436	632025	633616	635209	636804	638401
80	640000	641601	643204	644809	646416	648025	649636	651249	652864	654481
81	656100	657721	659344	660969	662596	664225	665856	667489	669124	670761
82	672400	674041	675684	677329	678976	680625	682276	683929	685584	687241
83	688900	690561	692224	693889	695556	697225	698896	700569	702244	703921
84	705600	707281	708964	710649	712336	714025	715716	717409	719104	720801
85	722500	724201	725904	727609	729316	731025	732736	734449	736164	737881
86	739600	741321	743044	744769	746496	748225	749956	751689	753424	755161
87	756900	758641	760384	762129	763876	765625	767376	769129	770884	772641
88	774400	776161	777924	779689	781456	783225	784996	786769	788544	790321
89	792100	793881	795664	797449	799236	801025	802816	804609	806404	808201
90	810000	811801	813604	815409	817216	819025	820836	822649	824464	826281
91	828100	829921	831744	833569	835396	837225	839056	840889	842724	844561
92	846400	848241	850084	851929	853776	855625	857476	859329	861184	863041
93	864900	866761	868624	870489	872356	874225	876096	877969	879844	881721
94	883600	885481	887364	889249	891136	893025	894916	896809	898704	900601
95	902500	904401	906304	908209	910116	912025	913936	915849	917764	919681
96	921600	923521	925444	927369	929296	931225	933156	935089	937024	938961
97	940900	942841	944784	946729	948676	950625	952576	954529	956484	958441
98	960400	962361	964324	966289	968256	970225	972196	974169	976144	978121
99	980100	982081	984064	986049	988036	990025	992016	994009	996004	998001
Tal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Kvadratrötter ur talen 1—499.

Tal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,000	1,000	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449	2,646	2,828	3,000
1	3,162	3,317	3,464	3,606	3,742	3,873	4,000	4,123	4,243	4,359
2	4,472	4,583	4,690	4,796	4,899	5,000	5,099	5,196	5,292	5,385
3	5,477	5,568	5,657	5,745	5,831	5,916	6,000	6,083	6,164	6,245
4	6,325	6,403	6,481	6,557	6,633	6,708	6,782	6,856	6,928	7,000
5	7,071	7,141	7,211	7,280	7,348	7,416	7,483	7,550	7,616	7,681
6	7,746	7,810	7,874	7,937	8,000	8,062	8,124	8,185	8,246	8,307
7	8,367	8,426	8,485	8,544	8,602	8,660	8,718	8,775	8,832	8,888
8	8,944	9,000	9,055	9,110	9,165	9,220	9,274	9,327	9,381	9,434
9	9,487	9,539	9,592	9,644	9,695	9,747	9,798	9,849	9,899	9,950
10	10,000	10,050	10,100	10,149	10,198	10,247	10,296	10,344	10,392	10,440
11	10,488	10,536	10,583	10,630	10,677	10,724	10,770	10,817	10,863	10,909
12	10,954	11,000	11,045	11,091	11,136	11,180	11,225	11,269	11,314	11,358
13	11,402	11,446	11,489	11,533	11,576	11,619	11,662	11,705	11,747	11,790
14	11,832	11,874	11,916	11,958	12,000	12,042	12,083	12,124	12,166	12,207
15	12,247	12,288	12,329	12,369	12,410	12,450	12,490	12,530	12,570	12,610
16	12,649	12,689	12,728	12,767	12,806	12,845	12,884	12,923	12,961	13,000
17	13,038	13,077	13,115	13,153	13,191	13,229	13,266	13,304	13,342	13,379
18	13,416	13,454	13,491	13,528	13,565	13,601	13,638	13,675	13,711	13,748
19	13,784	13,820	13,856	13,892	13,928	13,964	14,000	14,036	14,071	14,107
20	14,142	14,177	14,213	14,248	14,283	14,318	14,353	14,387	14,422	14,457
21	14,491	14,526	14,560	14,595	14,629	14,663	14,697	14,731	14,765	14,799
22	14,832	14,866	14,900	14,933	14,967	15,000	15,033	15,067	15,100	15,133
23	15,166	15,199	15,232	15,264	15,297	15,330	15,362	15,395	15,427	15,460
24	15,492	15,524	15,556	15,588	15,620	15,652	15,684	15,716	15,748	15,780
25	15,811	15,843	15,875	15,906	15,937	15,969	16,000	16,031	16,062	16,093
26	16,125	16,155	16,186	16,217	16,248	16,279	16,310	16,340	16,371	16,401
27	16,432	16,462	16,492	16,523	16,553	16,583	16,613	16,643	16,673	16,703
28	16,733	16,763	16,793	16,823	16,852	16,882	16,912	16,941	16,971	17,000
29	17,029	17,059	17,088	17,117	17,146	17,176	17,205	17,234	17,263	17,292
30	17,321	17,349	17,378	17,407	17,436	17,464	17,493	17,521	17,550	17,578
31	17,607	17,635	17,664	17,692	17,720	17,748	17,776	17,804	17,833	17,861
32	17,889	17,916	17,944	17,972	18,000	18,028	18,055	18,083	18,111	18,138
33	18,166	18,193	18,221	18,248	18,276	18,303	18,330	18,358	18,385	18,412
34	18,439	18,466	18,493	18,520	18,547	18,574	18,601	18,628	18,655	18,682
35	18,708	18,735	18,762	18,788	18,815	18,841	18,868	18,894	18,921	18,947
36	18,974	19,000	19,026	19,053	19,079	19,105	19,131	19,157	19,183	19,209
37	19,235	19,261	19,287	19,313	19,339	19,365	19,391	19,416	19,442	19,468
38	19,494	19,519	19,545	19,570	19,596	19,621	19,647	19,672	19,698	19,723
39	19,748	19,774	19,799	19,824	19,849	19,875	19,900	19,925	19,950	19,975
40	20,000	20,025	20,050	20,075	20,100	20,125	20,149	20,174	20,199	20,224
41	20,248	20,273	20,298	20,322	20,347	20,372	20,396	20,421	20,445	20,469
42	20,494	20,518	20,543	20,567	20,591	20,616	20,640	20,664	20,688	20,712
43	20,736	20,761	20,785	20,809	20,833	20,857	20,881	20,905	20,928	20,952
44	20,976	21,000	21,024	21,048	21,071	21,095	21,119	21,142	21,166	21,190
45	21,213	21,237	21,260	21,284	21,307	21,331	21,354	21,378	21,401	21,424
46	21,448	21,471	21,494	21,517	21,541	21,564	21,587	21,610	21,633	21,656
47	21,679	21,703	21,726	21,749	21,772	21,794	21,817	21,840	21,863	21,886
48	21,909	21,932	21,954	21,977	22,000	22,023	22,045	22,068	22,091	22,113
49	22,136	22,159	22,181	22,204	22,226	22,249	22,271	22,293	22,316	22,338
Tal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Kvadratrötter ur talen 500—999.

Tal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	22,361	22,383	22,405	22,428	22,450	22,472	22,494	22,517	22,539	22,561
51	22,583	22,605	22,627	22,650	22,672	22,694	22,716	22,738	22,760	22,782
52	22,804	22,825	22,847	22,869	22,891	22,913	22,935	22,956	22,978	23,000
53	23,022	23,043	23,065	23,087	23,108	23,130	23,152	23,173	23,195	23,216
54	23,238	23,259	23,281	23,302	23,324	23,345	23,367	23,388	23,409	23,431
55	23,452	23,473	23,495	23,516	23,537	23,558	23,580	23,601	23,622	23,643
56	23,664	23,685	23,707	23,728	23,749	23,770	23,791	23,812	23,833	23,854
57	23,875	23,896	23,917	23,937	23,958	23,979	24,000	24,021	24,042	24,062
58	24,083	24,104	24,125	24,145	24,166	24,187	24,207	24,228	24,249	24,269
59	24,290	24,310	24,331	24,352	24,372	24,393	24,413	24,434	24,454	24,474
60	24,495	24,515	24,536	24,556	24,576	24,597	24,617	24,637	24,658	24,678
61	24,698	24,718	24,739	24,759	24,779	24,799	24,819	24,839	24,860	24,880
62	24,900	24,920	24,940	24,960	24,980	25,000	25,020	25,040	25,060	25,080
63	25,100	25,120	25,140	25,159	25,179	25,199	25,219	25,239	25,259	25,278
64	25,298	25,318	25,338	25,357	25,377	25,397	25,417	25,436	25,456	25,475
65	25,495	25,515	25,534	25,554	25,573	25,593	25,612	25,632	25,652	25,671
66	25,690	25,710	25,729	25,749	25,768	25,788	25,807	25,826	25,846	25,865
67	25,884	25,904	25,923	25,942	25,962	25,981	26,000	26,019	26,038	26,058
68	26,077	26,096	26,115	26,134	26,153	26,173	26,192	26,211	26,230	26,249
69	26,268	26,287	26,306	26,325	26,344	26,363	26,382	26,401	26,420	26,439
70	26,458	26,476	26,495	26,514	26,533	26,552	26,571	26,589	26,608	26,627
71	26,646	26,665	26,683	26,702	26,721	26,739	26,758	26,777	26,796	26,814
72	26,833	26,851	26,870	26,889	26,907	26,926	26,944	26,963	26,981	27,000
73	27,019	27,037	27,055	27,074	27,092	27,111	27,129	27,148	27,166	27,185
74	27,203	27,221	27,240	27,258	27,276	27,295	27,313	27,331	27,350	27,368
75	27,386	27,404	27,423	27,441	27,459	27,477	27,495	27,514	27,532	27,550
76	27,568	27,586	27,604	27,622	27,641	27,659	27,677	27,695	27,713	27,731
77	27,749	27,767	27,785	27,803	27,821	27,839	27,857	27,875	27,893	27,911
78	27,928	27,946	27,964	27,982	28,000	28,018	28,036	28,054	28,071	28,089
79	28,107	28,125	28,142	28,160	28,178	28,196	28,213	28,231	28,249	28,267
80	28,284	28,302	28,320	28,337	28,355	28,373	28,390	28,408	28,425	28,443
81	28,460	28,478	28,496	28,513	28,531	28,548	28,566	28,583	28,601	28,618
82	28,636	28,653	28,671	28,688	28,705	28,723	28,740	28,758	28,775	28,792
83	28,810	28,827	28,844	28,862	28,879	28,896	28,914	28,931	28,948	28,965
84	28,983	29,000	29,017	29,034	29,052	29,069	29,086	29,103	29,120	29,138
85	29,155	29,172	29,189	29,206	29,223	29,240	29,257	29,275	29,292	29,309
86	29,326	29,343	29,360	29,377	29,394	29,411	29,428	29,445	29,462	29,479
87	29,496	29,513	29,530	29,547	29,563	29,580	29,597	29,614	29,631	29,648
88	29,665	29,682	29,698	29,715	29,732	29,749	29,766	29,783	29,799	29,816
89	29,833	29,850	29,866	29,883	29,900	29,917	29,933	29,950	29,967	29,983
90	30,000	30,017	30,033	30,050	30,067	30,083	30,100	30,116	30,133	30,150
91	30,166	30,183	30,199	30,216	30,232	30,249	30,265	30,282	30,299	30,315
92	30,332	30,348	30,364	30,381	30,397	30,414	30,430	30,447	30,463	30,480
93	30,496	30,512	30,529	30,545	30,561	30,578	30,594	30,610	30,627	30,643
94	30,659	30,676	30,692	30,708	30,725	30,741	30,757	30,773	30,790	30,806
95	30,822	30,838	30,854	30,871	30,887	30,903	30,919	30,935	30,952	30,968
96	30,984	31,000	31,016	31,032	31,048	31,064	31,081	31,097	31,113	31,129
97	31,145	31,161	31,177	31,193	31,209	31,225	31,241	31,257	31,273	31,289
98	31,305	31,321	31,337	31,353	31,369	31,385	31,401	31,417	31,432	31,448
99	31,464	31,480	31,496	31,512	31,528	31,544	31,559	31,575	31,591	31,607
Tal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

LITTERATURREFERENSER

Edwards, A.L. (1960) Experimental Design in Psychological Research. (Rev. ed.) New York: Holt, Rinehart & Winstone.

Ferguson, G. (1966) Statistical Analysis in Psychology and Educetion. New York: Mc Graw-Hill.

Kendall, M.G. (1946) The Advanced Theory of Statistics. Vol. II. London: Griffin.

Lindquist, C.F. (1956) Design and Analysis of Experiments in Psychology and Education. Boston: Houghton, Mifflin.

Svensson, A. (1971) Relative Achievement. School performance in relation to intelligence, sex and home environment. Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Walker, H.M. & Lev, J. (1953) Statistical Inference. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Vejde, O. (1965) Hur man räknar statistik. Stockholm: Natur och Kultur.

ÖVNINGUPPGIFTER

I FLERVALSFRÅGOR

1. Sambandet mellan intelligens (x) och skolprestation (y) uppgår i en undersökning till 0.70 (r_{xy}). Härav följer att det finns en viss spridning runt regressionslinjen. Vilka data förutom korrelationskoefficienten, behöver du för att beräkna denna spridning ($s_{y.x}$)?
   a) s_y
   b) s_x
   c) $\overline{X}$
   d) $\overline{Y}$

2. I en undersökning vill man studera hur tre olika undervisningsmetoder i engelska påverkar språkkunskaperna bland pojkar respektive flickor. Vilken statistisk analysmetod bör man använda:
   a) en-vägs variansanalys
   b) två-vägs variansanalys
   c) tre-vägs variansanalys
   d) kovariansanalys

3. Vilket av följande villkor behöver inte vara uppfyllt för att man skall kunna uttrycka sambandet mellan två variabler i form av en produktmomentkorrelation?
   a) De båda variablerna skall vara kontinuerliga
   b) Fördelningarna i de båda variablerna skall vara lika
   c) Spridningarna i de båda variablerna skall vara lika
   d) Sambandet mellan de båda variablerna skall vara linjärt

4. Vid en kovariansanalys undersöker man differenserna mellan:
   a) funna medeltal
   b) justerade medeltal
   c) funna varianser
   d) justerade varianser

5. I en undersökning - baserad på ett stickprov bestående av 18 treåringar - kom man fram till att sambandet mellan den tid föräldrarna samtalar med sina barn och barnens ordförråd var +0.60 (produktmomentkorrelation). Vid signifikanstestningen av denna korrelation erhöll man följande värde:
   a) 2.50
   b) 2.75
   c) 3.00
   d) 3.25

6. Vilket av följande påståenden är riktigt beträffande en-vägs variansanalys?
   a) Variansmåtten är additiva
   b) Mellangruppskvadratsumman skall divideras med N-k frihetsgrader
   c) Totala antalet frihetsgrader är lika med totala antalet individer
   d) Vid testning av skillnader mellan enskilda medeltal kan både t- och F-test användas

7. Vilket av nedanstående krav behöver inte alls vara uppfyllt för att man skall få tillämpa variansanalysmetodiken?
   a) Kravet på additivitet
   b) Kravet på normalitet
   c) Kravet på varianshomogenitet
   d) Kravet på medeltalsekvivalens

8. I en undersökning erhåller man följande värden:
   $\overline{X} = 50$, $s_x = 12$
   $\overline{Y} = 70$, $s_y = 18$
   $r_{xy} = 0.60$, $N = 400$
   Detta innebär att spridningen runt regressionslinjen ($s_{y.x}$) blir:
   a) 8.2
   b) 10.4
   c) 12.8
   d) 14.4

9. I en undersökning ingick tre grupper om vardera 25 individer. För att undersöka om det finns några skillnader mellan grupperna görs en variansanalys, varvid man erhåller följande resultat:
Mellangruppskvadratsumman = 272,
Inomgruppskvadratsumman = 1440,
samt ett F-värde som uppgår till:
   a) 3.20
   b) 4.40
   c) 5.60
   d) 6.80

10. Korrelationen mellan poängen på ett standardiserat kunskapsprov i engelska och lärarens betyg i samma ämne uppgår till 0.80. Medeltalet på kunskapsprovet är 30 poäng och medelbetyget 3.0. Spridningen på kunskapsprovet är 10 och betygets spridning 1.0. Om man använder kunskapsprovet som oberoende variabel och betyget som beroende variabel blir regressionskoefficienten:
   a) 0.008
   b) 0.080
   c) 0.800
   d) 8.00

11. För att man skall få tillämpa kovariansanalysmetoden måste kravet på regressionshomogenitet vara uppfyllt. Detta krav innebär att:
   a) gruppernas justerade medeltal är lika
   b) gruppernas regressionslinjer är parallella
   c) grupperna är homogent sammansatta
   d) gruppernas spridningar är lika

12. Vilket av nedanstående påstående är felaktigt? Varians- och kovariansanalysmetoden:
   a) är båda parametriska metoder
   b) brukas båda vid multipla medeltalsjämförelser
   c) kan båda användas vid såväl sambandsundersökningar som experimentella undersökningar
   d) utmynnar båda i en testning av skillnaderna mellan justerade medeltal

II ÖVRIGA UPPGIFTER

1. Frågor i anslutning till variansanalysmetoden:

   a) Vilka är de väsentligaste skillnaderna mellan en-vägs och två-vägs variansanalys?

   b) Vad menas med kravet på varianshomogenitet?

   c) Vad är ett inomgruppsvariansmått?

   d) Vad innebär det, om man får ett F-värde som är betydligt större än 1?

   e) Giv exempel på en 4 x 3 x 2 design

2. För att undersöka om det finns några skillnader i bensinförbrukning mellan tre olika bilmärken, väljer man slumpmässigt ut tre bilar av vardera märket. Varje bil körs 10 mil, varefter bensinåtgången kontrolleras. Bilarnas förbrukning återges i tabellen nedan. Undersök om det finns några signifikanta skillnader på 5%-nivån mellan bilmärken.

Bilmärke	A	B	C
Bensinförbrukning	8	9	10
per bil	9	10	11
	10	11	12

3. I en undersökning rörande sambandet mellan längd (x) och vikt (y) bland ynglingar i 18-årsåldern har man fått fram följande data:

   $\overline{X} = 175$ $\quad S_x = 5$
   $\overline{Y} = 70$ $\quad S_y = 10$
   $r_{xy} = 0.50$ $\quad N = 77$

   a) Sambandet mellan de båda variablerna är uttryckt i form av en produktmomentkorrelation. Vilka krav måste vara uppfyllda för att man skall få använda detta sambandsmått?

   b) Beräkna regressionskoefficienten (b_{yx}).

   c) Beräkna spridningen runt regressionslinjen ($S_{y.x}$)

   d) Vilken nytta har man av att känna till detta spridningsmått?

4. För att undersöka om det finns några skillnader i längd mellan pojkar i 13-, 14-, 15-, 16- och 17-årsåldern väljer man slumpmässigt ut 100 pojkar från varje åldersgrupp. Undersökningen ger följande resultat.

Åldersgrupp	Genomsnittlig längd ($\bar{X}$)
13	159 cm
14	167 cm
15	173 cm
16	175 cm
17	176 cm

Mellangruppskvadratsumman = 2448
Inomgruppskvadratsumman = 8910

Undersök om det finns några signifikanta skillnader mellan åldersgrupperna samt mellan vilka åldersgrupper som eventuella signifikanta differenser är belägna. Samtliga testningar görs på 1 %-nivån.

5. För att undersöka om det finns någon skillnad mellan Sveriges bästa manliga och kvinnliga höjdhoppare, när hänsyn tagits till differensen i kroppslängd, konstanthåller man längden på statistisk väg med hjälp av kovariansanalysmetoden. Nedan följer vissa data från undersökningen.

Kön	Antal	Kroppslängd		Höjdhoppsresultat	
		$\bar{X}$	s_x	$\bar{Y}$	s_y
Män	50	184	4	203	8
Kvinnor	50	172	4	168	8

Korrelationen mellan kroppslängd och höjdhoppsresultat uppgår till 0.60 bland både män och kvinnor.

a) Är den funna korrelationen signifikant?
b) Vad blir männens respektive kvinnornas justerade medelvärden i höjdhopp?

6. För att få veta om det finns någon skillnad i sjukfrånvaro mellan manliga och kvinnliga tjänstemän i olika åldersklasser vid ett större företag går man tillväga på följande sätt: De anställda indelas i fyra åldersklasser, varefter man slumpmässigt väljer ut 25 män och 25 kvinnor från varje klass och ser efter hur många dagar dessa personer varit frånvarande under de två senaste månaderna. Det genomsnittliga antalet sjukdagar samt vissa andra data följer nedan. Hur skall man tolka undersökningsresultaten?

	Ålder			
	under 30	30 - 40	40 - 50	över 50
män	3.7	2.2	1.4	0.5
kvinnor	7.2	4.6	1.8	0.6

Radkvadratsumman = 63
Kolumnkvadratsumman = 270
Interaktionskvadratsumman = 324
Inom-cellskvadratsumman = 1728

7. För att undersöka effekten av olika typer av föräldrautbildning med avseende på mannens engagemang i spädbarnsskötsel går man tillväga på följande sätt: 30 blivande barnafäder fördelades slumpmässigt på tre grupper. Grupp I erhåller ingen som helst utbildning. Grupp II får åhöra föreläsningar i barnpsykologi under sammanlagt 15 timmar. Grupp III får deltaga i en 10-poängskurs i barnkunskap vid pedagogiska institutionen. All undervisning är avslutad innan barnafödseln. Två månader efter denna tar man reda på hur många timmar per dag som respektive fader ägnar åt sitt barn. Härvid får man fram de data som återges i tabellen nedan. Hur vill Du tolka utfallet av undersökningen?

Grupp	I	II	III
Antal timmar	0	0	0
barnavårdande	0	0	1
aktiviteter	0	1	1
	0	1	1
	1	1	2
	1	2	2
	1	2	3
	2	2	3
	2	3	3
	3	3	4

8. 18 personer, fördelade på tre grupper, har deltagit i en kurs i lästeknik. Grupperna har fått något varierande undervisning. Efter kursens slut gavs ett läsprov. Nedan redovisas hur många fel varje deltagare hade på detta prov. Undersök om det finns några signifikanta skillnader på 5 %-nivå mellan grupperna.

Grupp	I	II	III
Antal fel	1	1	1
per deltagare	1	2	2
	2	3	3
	2	3	4
	3	4	5
	3	5	6

9. I en undersökning rörande sambandet mellan intelligens (X) och skolprestation (Y) har man fått fram följande data:

$\overline{X} = 42 \qquad s_x = 8$

$\overline{Y} = 58 \qquad s_y = 12$

$r_{xy} = 0.80 \qquad N = 38$

a) Signifikanstesta korrelationskoefficienten

b) Hur tolkar Du utfallet av signifikanstestningen?

c) Beräkna regressionskoefficienten (b_{yx})

d) Beräkna spridningen runt regressionslinjen ($s_{y.x}$)

e) En elev har 47 poäng på intelligenstestet. Vilket blir hans väntade värde (Y') på skolprestationstestet?

10. Frågor i anslutning till kovariansanalysmetoden:

a) Kovariansanalysmetoden är en form av statistisk kontroll som man tillgriper när det är omöjligt eller olämpligt att använda experimentell kontroll. Giv exempel på en sådan situation.

b) Kovariansanalysmetoden kan även tillämpas i strikt experimentella undersökningar. Vilken funktion har metoden då?

c) För att det skall vara meningsfullt att använda metoden måste det finnas en viss korrelation mellan x- och y-variabeln. Varför?

d) Metoden ställer krav på regressionslinearitet och regressionshomogenitet. Vad innebär dessa krav?

11. För att komma tillrätta med sängvätningsproblemet använder man sig av olika tekniker. I en undersökning studerade man tre olika terapeutiska metoder:

I) Hypnosbehandling
II) Sängvätningsmatta
III) Medicinska preparatet B 14.

15 sängvätare i 10-årsåldern fördelades slumpmässigt på tre lika stora grupper, varefter grupperna erhöll olka behandling. Försöket pågick en månad, varefter man under en vecka noterade antalet nätter utan sängvätning. Tre individer avbröt behandlingen. Resultaten för de övriga framgår av tabellen. Vilka slutsatser vill Du dra utifrån undersökningens utfall?

Grupp	I	II	III
Antal nätter	4	3	2
utan sängvätning	5	4	3
	6	5	4
		6	5
			6

12. I en tandvårdsundersökning önskade man belysa vilken betydelse som användningen av fluoriserad tandkräm respektive bruket av tandstickor har för att motverka uppkomsten av karies. Dessutom vill man veta om det fanns någon interaktion mellan de båda behandlingsmetoderna. Till undersökningen utvaldes 200 ungdomar, vilka slumpmässigt fördelades på fyra lika stora undergrupper. Under ett år utsätts sedan försökspersonerna för någon av de fyra behandlingskombinationerna, varefter man undersöker hur många tecken på karies (hål) som varje försöksperson har. Nedan redovisas det genomsnittliga antalet hål för varje grupp samt vissa andra data. Nu är det Din uppgift att analysera undersökningsresultaten.

	Tandkräm utan fluor	Tandkräm med fluor
Använder ej tandstickor	$\bar{x}_{11.} = 3.0$	$\bar{x}_{12.} = 2.2$
Använder tandstickor	$\bar{x}_{21.} = 1.4$	$\bar{x}_{22.} = 0.8$

Radkvadratsumman	=	31.5
Kolumnkvadratsumman	=	15.0
Interaktionskvadratsumman	=	4.5
Inom-cellskvadratsumman	=	294.0

13. I en undersökning plockade man slumpmässigt ut fem elever från vardera årskurs 1, 2, 3, 4 och 5. Eleverna fick genomgå ett prov i trafikkunskap som innehöll 40 uppgifter. Elevernas resultat framgår nedan. Undersök om det finns några signifikanta skillnader mellan årskurserna samt mellan vilka årskurser som eventuella signifikanta differenser är belägna. Samtliga testningar görs på 1 %-nivån.

Årskurs	1	2	3	4	5
Antal poäng	5	4	17	15	35
	6	7	26	18	27
	12	9	17	21	29
	12	9	20	26	30
	7	14	12	20	25

Mellangruppskvadratsumman = 1521.44
Inomgruppskvadratsumman = 326.40

14. För att undersöka om det finns några skillnader i reparationskostnader mellan de fyra bilfabrikaten Bierwagen, Dunderbird, Korven och Tavarich, går man tillväga på följande sätt. Man väljer ut 20 bilar av vardera fabrikatet. Samtliga bilar är fem år gamla. De har emellertid körts olika långt, varför man konstanthåller körsträckan med hjälp av kovariansanalys. I tabellen nedan redovisas antalet körda mil (x), reparationskostnaderna (y) samt korrelationen mellan dessa båda variabler.

Bilmärke	N	$\overline{X}$	s_x	$\overline{Y}$	s_y	r_{xy}
Bierwagen	20	10.000	2.000	7.000	2.000	0.46
Dunderbird	20	12.000	2.000	9.000	2.000	0.48
Korven	20	14.000	2.000	6.000	2.000	0.52
Tavarich	20	16.000	2.000	14.000	2.000	0.54

a) Beräkna de väntade y-medelvärdena

b) Vilka upplysningar ger oss dessa väntade värden?

c) Beräkna de justerade y-medelvärdena

d) Vilken information kan de justerade värdena ge?

15. Vid ett handelsinstitut förekommer två undervisningsmetoder i maskinskrivning, "snuddmetoden" och "slagmetoden". Vilken metod är mest effektiv? För att klarlägga detta låter man 200 elever utbilda sig enligt "snuddmetoden" och 200 enligt "slagmetoden". Inom vardera gruppen får 100 elever träna på elektriska maskiner och 100 på icke elektriska maskiner. Samtliga får träna under 90 timmar, varefter man ger ett prov - man kontrollerar hur många nedslag varje elev klarar under en minut. Nedan redovisas det genomsnittliga antalet nedslag för var och en av de fyra undergrupperna samt vissa andra data. Med utgångspunkt från dessa skall Du signifikanstesta rad-, kolumn- och interaktionseffekten. Välj själv signifikansnivå samt ge en kortfattad redogörelse för utfallet av undersökningen.

	Snuddmetoden	Slagmetoden
Elektrisk skrivmaskin	$\bar{X}_{11.} = 190$	$\bar{X}_{12.} = 160$
Icke elektrisk skrivmaskin	$\bar{X}_{21.} = 150$	$\bar{X}_{22.} = 185$

Radkvadratsumman = 1200
Kolumnkvadratsumman = 400
Interaktionskvadratsumman = 4000
Inom-cellskvadratsumman = 158 400

16. I tabellen nedan återges antalet fel i ett psykomotoriskt prov för fyra grupper av individer som testats under olika experimentella förhållanden. Testa nollhypotesen:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

Signifikansnivå: 5 %

Grupp	I	II	III	IV
Antal fel	16	24	16	25
	7	6	15	19
	19	15	18	16
	24	25	19	17
	31	32	6	42
		24	13	45
		29	18	

17. För att undersöka om det finns någon skillnad i studieprestationerna i matematik mellan elever från olika regioner i Sverige går man tillväga på följande sätt: Landet indelas i större tätorter, mindre tätorter och glesbygd. Från var och en av de båda förstnämnda kategorierna utväljes slumpvis 200 elever och från den sistnämnda 100 elever. Samtliga elever tillhör årskurs 6. Vid vårterminens slut insamlas matematikbetygen för de berörda eleverna. För att kontrollera eventuella skillnader i begåvning har eleverna dessförinnan fått genomgå ett induktivt begåvningstest av sifferserietyp. Vissa data från undersökningen framgår nedan:

Tabell 1: Medeltal och spridningar

Region	Antal	Testresultat		Betyg	
		$\overline{X}$	s_x	$\overline{Y}$	s_y
Större tätorter	200	21	5	3.04	1.00
Mindre tätorter	200	20	5	3.05	1.00
Glesbygd	100	18	5	3.07	1.00

Tabell 2: Korrelationer mellan testresultat och betyg

Region	Antal	r_{xy}
Större tätorter	200	0.62
Mindre tätorter	200	0.61
Glesbygd	100	0.54

Din uppgift är nu:

a) Visa med hjälp av grafisk framställning skillnaderna mellan ortstyperna i matematikbetyg, när hänsyn tagits till skillnader i begåvning.

b) Kontrollera de grafiska uppgifternas riktighet med hjälp av relevanta formler.

FACIT

Flervalsfrågor:

1)	a	5)	c	9)	d
2)	b	6)	d	10)	b
3)	c	7)	d	11)	b
4)	b	8)	d	12)	d

Övriga uppgifter:

2) $F = 3.00$ H_o accepteras

3) b) $b_{yx} = 1.00$ c) $s_{y.x} = 8.66$

4) $F = 34.00$ H_o förkastas

17 16 15 14 13

5) a) $t = 7.42$ korrelationen är signifikant (kritiskt värde 2.63)

b) Justerade medeltal: Män 195.80
Kvinnor 175.20

6) $F_r = 7$; $F_c = 10$; $F_i = 12$

H_o förkastas i samtliga fall

7) $F = 1.95$. H_o accepteras.

8) $F = 1.67$ H_o accepteras

9) a) $t = 8.00$ c) $b_{yx} = 1.20$

d) $s_{y.x} = 7.20$ e) 64.00

11) $F = 0.53$ H_o accepteras

12) $F_r = 21$; H_o förkastas

$F_c = 10$; H_o förkastas

$F_i = 3$; H_o accepteras

13) $F = 23.34$ H_o förkastas

5 $\underline{4 \quad 3}$ $\underline{2 \quad 1}$

14)

Bilmärke	Väntade värden	Justerade värden
Bierwagen	7.500	8.500
Dunderbird	8.500	9.500
Korven	9.500	5.500
Tavarich	10.500	12.500

15) $F_r = 3.00$ kritiskt värde

$F_c = 1.00$ df 1;396

$F_i = 10.00$ 5 % - 3.86

1 % - 6.70

Endast interaktionseffekten är signifikant

16) $F = 2.06$ H_o accepteras

17) b)

Region	Väntade värden	Justerade värden
Större tätorter	3.17	2.92
Mindre tätorter	3.05	3.05
Glesbygd	2.81	3.31